ĐOÀN TRÍ DŨNG – HÀ HỮU HẢI – NGUYỄN TẤN SIÊNG
– HỒ XUÂN TRỌNG
(Giáo viên chuyên luyện thi THPT Quốc Gia)

LUYỆN SIÊU TƯ DUY CASIO

CHUYÊN ĐỀ

PHƯƠNG TRÌNH
BẤT PHƯƠNG TRÌNH
HỆ PHƯƠNG TRÌNH
ĐẠI SỐ VÀ VÔ TỶ

* *Dành cho học sinh lớp 10, 11, 12 luyện thi THPTQG*
* *Phân tích, bình luận chi tiết, giải nhiều cách*
* *Tài liệu tham khảo cho quý thầy, cô giáo*
* *Bồi dưỡng học sinh giỏi*



NHÀ XUẤT BẢN
ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP HỒ CHÍ MINH

LỜI MỞ ĐẦU

Bài toán phương trình, bất phương trình, hệ phương trình vốn dĩ luôn được coi là con át chủ bài trong chương trình giảng dạy Trung học phổ thông nói chung cũng như đánh giá năng lực học sinh trong mỗi kì thi Trung học phổ thông Quốc Gia nói riêng.

Các bài tập thuộc dạng toán này đòi hỏi học sinh cần tư duy theo nhiều hướng khác nhau, sử dụng các phương pháp khác nhau để có thể tìm được mấu chốt vấn đề, một trong số đó là phương pháp sử dụng máy tính Casio

Trên cơ sở các kĩ năng xử lí máy tính Casio sẵn có, tác giả cuốn sách đã nghiên cứu và tìm ra những phương pháp xử lí mới, độc đáo từ đó đúc kết thành 2 phần chính trong cuốn sách này:

- Phần 1: Phân loại các kĩ thuật giải bài toán phương trình, bất phương trình, hệ phương trình.
- Phần 2: Tổng hợp các bài toán phương trình, bất phương trình, hệ phương trình hay và khó trong các đề thi thử trên toàn quốc. Phần tổng hợp được đưa ra trong hai chủ đề cuối cùng.

Hi vọng cuốn sách này sẽ là cẩm nang giúp các em học sinh Trung học phổ thông có thể có thêm 1 hướng tiếp cận mới với bài toán phương trình, bất phương trình, hệ phương trình từ đó nâng cao khả năng tư duy và xử lí nhanh nhạy các tình huống tương tự.

Trong quá trình hoàn thành cuốn sách, chúng tôi xin gửi lời chân thành cảm ơn tới thầy Võ Quang Mẫn, thầy Nguyễn Đỗ Chiến, thầy Trần Đình Khánh cùng toàn thể các em học sinh đã góp ý, giúp chúng tôi hoàn thiện cuốn sách này.

Xin chân thành cám ơn.

Nhóm tác giả

Đoàn Trí Dũng (Casio Man) (Chủ biên)

Hà Hữu Hải – Nguyễn Tấn Siêng – Hồ Xuân Trọng



Chủ đề 1:
7 KỸ NĂNG CƠ BẢN CẦN BIẾT TRONG QUÁ TRÌNH GIẢI TOÁN BẰNG MÁY TÍNH CASIO

I. Kỹ năng 1: Kỹ năng nâng lũy thừa:

Kỹ năng nâng lũy thừa là rất quan trọng trong quá trình giải toán mà trong quá trình giải toán, ta vẫn thường gọi với những tên quen thuộc như "bình phương hai vế", "lập phương hai vế". Học sinh cần nắm vững các hằng đẳng thức cơ bản về nâng lũy thừa như sau:

- $(a \pm b)^2 = a^2 + b^2 \pm 2ab$.
- $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$.
- $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca)$.
- $(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a+b)(b+c)(c+a)$.
- $(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a+b+c)(ab+bc+ca) - 3abc$.

Tuy nhiên, chúng ta có thể sử dụng máy tính Casio để hỗ trợ với những biểu thức bậc không quá lớn và hệ số nhỏ như sau:

Ví dụ 1: $x^2 + x + 3 = (x+1)\sqrt{x-1}$

Bình phương hai vế của phương trình ta có: $(x^2+x+3)^2 = (x+1)^2(x-1)$

Thay $x = 100$ vào hai vế:

$$\begin{cases} (x^2+x+3)^2 = 102070609 = 1-02-07-06-09 = x^4 + 2x^3 + 7x^2 + 6x + 9 \\ (x+1)^2(x-1) = 1009899 = 1-00-98-99 = x^3 + 98x + 99 \end{cases}$$

Chú ý rằng hệ số của x trong vế phải không thể lớn như 98 và 99, do đó thay $98 = 100 - 2 = x - 2$ và $99 = 100 - 1 = x - 1$.

Ta có $(x+1)^2(x-1) = x^3 + 98x + 99 = x^3 + (x-2)x + (x-1) = x^3 + x^2 - x - 1$.

Do đó ta được:

$$(x^2+x+3)^2 = (x+1)^2(x-1) \Leftrightarrow x^4 + 2x^3 + 7x^2 + 6x + 9 = x^3 + x^2 - x - 1$$

Ví dụ 2: $2x^2 - x - 3 = (x+2)\sqrt{x-2}$

Về cơ bản cách làm của ví dụ 2 giống như trong ví dụ 1, tuy nhiên học sinh có thể bình phương nhanh hơn như sau:

$2x^2 - x - 3 = (x+2)\sqrt{x-2} \Rightarrow (2x^2-x-3)^2 - (x+2)^2(x-2) = 0$ (*).

Thay $x = 100$ vào (*) ta được:

$$(2x^2-x-3)^2 - (x+2)^2(x-2) = 394871017 = 3-94-87-10-17$$

Do đó $\left(2x^2-x-3\right)^2-\left(x+2\right)^2\left(x-2\right)=3x^4+94x^3+87x^2+10x+17$

$\Rightarrow\left(2x^2-x-3\right)^2-\left(x+2\right)^2\left(x-2\right)=3x^4+\left(x-6\right)x^3+\left(x-13\right)x^2+10x+17$

$\Rightarrow\left(2x^2-x-3\right)^2-\left(x+2\right)^2\left(x-2\right)=4x^4-5x^3-13x^2+10x+17$

Kỹ năng đọc số liệu của máy tính từ đó chuyển thành đa thức ta gọi là tư duy chuyển hóa số liệu của máy tính.

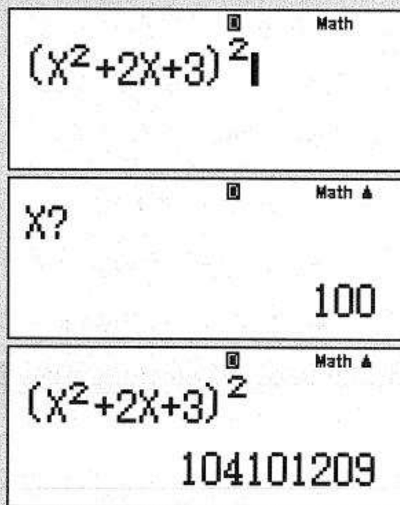
HƯỚNG DẪN SỬ DỤNG MÁY TÍNH
THAY SỐ VÀO BIẾN THÔNG QUA CÔNG CỤ CALC

Để có thể thay $x = 100$ thông qua máy tính Casio chúng ta tiến hành bấm máy tính $\left(X^2+2X+3\right)^2$.

Sau đó bấm CALC, máy tính hỏi giá trị của biến X, ta nhập 100 rồi bấm nút "=".

Nhận kết quả 1 – 04 – 10 – 12 – 09.

Do đó ta có: $\left(x^2+2x+3\right)^2$
$=x^4+4x^3+10x^2+12x+9$



BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1: Rút gọn biểu thức: $\left(x+2\right)^2+\left(2x+1\right)^3+\left(x^2+1\right)^2$.

Đáp án: $x^4+8x^3+15x^2+10x+6$.

Bài 2: Rút gọn biểu thức: $\left(x^2+2x+3\right)^2-\left(x+2\right)^2\left(3x-5\right)$.

Đáp án: $x^4+x^3+3x^2+20x+29$.

Bài 3: Rút gọn biểu thức: $\left(x^2+2\right)^3-\left(x^3+2\right)^2+2\left(x^2+x+1\right)\left(x-2\right)$.

Đáp án: $6x^4-2x^3+10x^2-2x$.

II. Kỹ năng 2: Dò nghiệm và phân tích nhân tử phương trình bậc cao:

Khi gặp một bài toán chứa căn thức hay còn gọi là phương trình vô tỷ, một trong các vấn đề đầu tiên có thể suy nghĩ tới đó là phương pháp nâng lũy thừa của biểu thức. Nếu như phương trình có nghiệm nguyên hoặc nghiệm hữu tỷ, việc phân tích nhân tử sẽ trở nên không quá khó khăn. Nhưng nếu phương trình có chứa nghiệm vô tỷ thì liệu rằng ta có nên nâng lũy thừa hay không?

Kỹ năng này sẽ cung cấp cho các em một kỹ thuật xử lý các bài toán có chứa nghiệm vô tỷ để các em có một công cụ tốt và không ngần ngại khi phải nâng lũy thừa loại bỏ căn thức. Chúng ta cần ghi nhớ các điều sau:

- ***Tư duy về định lý Viet đảo:*** Nếu một đa thức $P(x)$ có các nghiệm phân biệt x_1, x_2 thì đa thức $P(x)$ chia hết cho $x^2 - Sx + P$ trong đó ta có: $S = x_1 + x_2, P = x_1x_2$.
- ***Tư duy phân tích nhân tử qua chia đa thức:*** Nếu $P(x)$ chia cho $x^2 - Sx + P$ được kết quả là $Q(x)$ thì $P(x) = (x^2 - Sx + P)Q(x)$.

HƯỚNG DẪN SỬ DỤNG MÁY TÍNH
DÒ NGHIỆM THÔNG QUA CÔNG CỤ SOLVE

Để dò nghiệm của phương trình: $x^2 + \sqrt{x+3} = 9$

Ta tiến hành bấm máy tính: $X^2 + \sqrt{X+3} = 9$

Math ▲
X²+√(X+3)=9

Sau đó sử dụng công cụ SOLVE bằng cách bấm: SHIFT + CALC

Máy tính hỏi X, ta nhập 1 giá trị bất kỳ thỏa mãn điều kiện xác định, chẳng hạn ta chọn $X = 2$ và bấm "=".

Math ▲
Solve for X
2

Máy tính trả về kết quả là một nghiệm của phương trình. Chẳng hạn trong phương trình này ta thu được: $x \approx 2.576534734$.

Math ▲
X²+√(X+3)=9
X= 2.576534734
L-R= 0

Ví dụ: Giải phương trình: $2(x^2+2) = 5\sqrt{x^3+1}$

Phân tích

Đầu tiên, bình phương hai vế ta thu được kết quả như sau:

$4(x^2+2)^2 = 25(x^3+1) \Leftrightarrow 4x^4 - 25x^3 + 16x^2 - 9 = 0$.

Để phân tích đa thức nhân tử cho phương trình trên, ta tìm hai nghiệm gần đúng của phương trình trên. Bằng công cụ SHIFT CALC trong máy tính cầm tay, ta thu được các nghiệm vô tỷ có giá trị xấp xỉ:

$x_1 \approx -0.541381265, x_2 \approx 5.541381265$.

Sử dụng tư duy về định lý Viet đảo đã đề cập ở trên: $x_1 + x_2 \approx 5, x_1x_2 \approx -3$, do đó $4x^4 - 25x^3 + 16x^2 - 9$ chia hết cho $x^2 - 5x - 3$.

Sử dụng phép chia đa thức $4x^4 - 25x^3 + 16x^2 - 9$ cho $x^2 - 5x - 3$ ta được kết quả là: $4x^2 - 5x + 3$. Vậy: $4x^4 - 25x^3 + 16x^2 - 9 = (x^2 - 5x - 3)(4x^2 - 5x + 3)$.

Bài giải

Điều kiện xác định: $x \geq -1$.

Ta có: $2\left(x^2+2\right)=5\sqrt{x^3+1} \Rightarrow 4\left(x^2+2\right)^2=25\left(x^3+1\right)$

$\Leftrightarrow 4x^4+16x^2+16=25x^3+25$

$\Leftrightarrow \left(x^2-5x-3\right)\left(4x^2-5x+3\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-5x-3=0 \\ 4x^2-5x+3=0 \end{array}\right.$

Trường hợp 1: Với $x^2-5x-3=0 \Rightarrow x=\dfrac{5\pm\sqrt{37}}{2}$ (Thỏa mãn điều kiện).

Trường hợp 2: Với $4x^2-5x+3=0$, phương trình này vô nghiệm.

Kết luận: Phương trình có nghiệm $x=\dfrac{5\pm\sqrt{37}}{2}$.

HƯỚNG DẪN SỬ DỤNG MÁY TÍNH
CHIA ĐA THỨC THÔNG QUA CÔNG CỤ CALC 100

Để thực hiện phép chia đa thức trong bài toán trên, ta bấm máy tính:

$\dfrac{4X^4-25X^3+16X^2-9}{X^2-5X-3}$

Math ▲
$\dfrac{4X^4-25X^3+16X^2-9}{X^2-5X-3}$

Sau đó bấm CALC, máy tính hỏi giá trị của biến X, ta nhập 100 rồi bấm nút "=".

Math ▲
X?
100

Máy tính trả về kết quả 3 – 95 – 03.

Sử dụng tư duy chuyển hóa số liệu của máy tính đã nêu ở kỹ năng 1, ta có: 3 – 95 – 03 = $4x^2-5x+3$.

Math ▲
$\dfrac{4X^4-25X^3+16X^2-9}{X^2-5X-3}$
39503

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

Bài 1: Giải phương trình: $x^3-x^2-x-5=(x+4)\sqrt{x+2}$

Điều kiện xác định: $x \geq -2$.

Ta có: $x^3-x^2-x-5=(x+4)\sqrt{x+2} \Rightarrow \left(x^3-x^2-x-5\right)^2=(x+4)^2(x+2)$

$\Leftrightarrow x^6-2x^5-x^4-9x^3+x^2-22x-7=0$

Sử dụng máy tính Casio ta thu được:

$x_1 \approx 3.302775638, x_2 \approx -0.3027756377$

Tư duy Viet đảo: $x_1 + x_2 \approx 3, x_1x_2 \approx -1$

Nhân tử thu được: $x^2 - 3x - 1$

Vậy: $\left(x^2 - 3x - 1\right)\left(x^4 + x^3 + 3x^2 + x + 7\right) = 0$

Vì $x^4 + x^3 + 3x^2 + x + 7 = x^2\left(x^2 + x + 1\right) + \left(2x^2 + x + 7\right) > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Do đó (*) $\Rightarrow x^2 - 3x - 1 = 0$

Với $x^2 - 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$.

Thử lại nghiệm ta được $x = \dfrac{3 + \sqrt{13}}{2}$ là nghiệm duy nhất thỏa mãn.

Kết luận: Phương trình có nghiệm duy nhất $x = \dfrac{3 + \sqrt{13}}{2}$.

Bài 2: Giải phương trình: $2x^2 - 6x - 1 = \sqrt{4x + 5}$

Điều kiện xác định: $x \geq -\dfrac{5}{4}$.

Ta có: $2x^2 - 6x - 1 = \sqrt{4x + 5} \Leftrightarrow \left(2x^2 - 6x - 1\right)^2 = 4x + 5$

$\Leftrightarrow x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 2x - 1 = 0$

Sử dụng máy tính Casio ta thu được: $\begin{cases} x_1 \approx 2.414213562 \\ x_2 \approx -0.414213562 \\ x_3 \approx 3.732050808 \\ x_4 \approx 0.2679491924 \end{cases}$

Tư duy Viet đảo: $x_1 + x_2 \approx 2, x_1x_2 \approx -1$

Nhân tử thu được: $x^2 - 2x - 1$

Vậy: $\left(x^2 - 2x - 1\right)\left(x^2 - 4x + 1\right) = 0$

Trường hợp 1: Với $x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{2}$.

Kết hợp điều kiện ta có $x = 1 - \sqrt{2}$.

Trường hợp 2: Với $x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \pm \sqrt{3}$.

Kết hợp điều kiện ta có $x = 2 + \sqrt{3}$.

Kết luận: Phương trình có hai nghiệm phân biệt $x = 2 + \sqrt{3}$ và $x = 1 - \sqrt{2}$.

Bài 3: Giải phương trình: $x^3 + x^2 = \left(x^2 + 1\right)\sqrt{x + 1} + 1$

Điều kiện xác định: $x \geq -1$.

Ta có: $x^3 + x^2 = \left(x^2 + 1\right)\sqrt{x + 1} + 1$

$\Leftrightarrow x^3 + x^2 - 1 = \left(x^2 + 1\right)\sqrt{x + 1} \Rightarrow \left(x^3 + x^2 - 1\right)^2 = \left(x^2 + 1\right)^2\left(x + 1\right)$

$\Leftrightarrow x^6 + x^5 - 4x^3 - 4x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x\left(x^5 + x^4 - 4x^2 - 4x - 1\right) = 0$ (*)

Sử dụng máy tính Casio ta thu được: $\begin{cases} x_1 \approx -0.430159709 \\ x_2 \approx 1.618033989 \\ x_3 \approx -0.618033988 \end{cases}$

Tư duy Viet đảo: $x_2 + x_3 = 1.0000000001 \approx 1, x_2 x_3 = -0.99999999989 \approx -1$

Nhân tử thu được: $x^2 - x - 1$

Do đó (*) $\Leftrightarrow x\left(x^2 - x - 1\right)\left(x^3 + 2x^2 + 3x + 1\right) = 0$ (**)

Điều kiện có nghiệm của phương trình:

$x^3 + x^2 - 1 \geq 0 \Rightarrow x^3 + x^2 - \frac{3}{8} > 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{3}{4}\right) > 0 \Rightarrow x > \frac{1}{2}$

Vì $x > \frac{1}{2} > 0 \Rightarrow x^3 + 2x^2 + 3x + 1 > 0$. Do đó (**) $\Rightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Kết hợp điều kiện ta thấy chỉ có nghiệm $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ thỏa mãn.

Kết luận: Phương trình có nghiệm duy nhất là $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1: Giải phương trình: $x^2 - 6x - 2 = \sqrt{x+8}$

Đáp số: $x = \frac{5 - \sqrt{41}}{2} \vee x = \frac{7 + 3\sqrt{5}}{2}$

Bài 2: Giải phương trình: $x^2 - 3x - 2 = (x-1)\sqrt{2x+1}$

Đáp số: $x = 3 \pm 2\sqrt{3} \vee x = 1 - \sqrt{2}$

Bài 3: Giải phương trình: $15x^2 = x + 2\sqrt{x^2 + x + 1} + 5$

Đáp số: $x = \frac{1 + \sqrt{13}}{6} \vee x = \frac{-1 - \sqrt{29}}{10}$

Bài 4: Giải phương trình: $2x + 2 = \sqrt{2x+1} + \sqrt{6x+5}$

Đáp số: $x = 1 + \sqrt{2}$

Bài 5: Giải phương trình: $3x^2 = \sqrt[3]{x^3 + 4x + 2}$

Đáp số: $x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{6}$

III. Kỹ năng 3: Phân tích nhân tử biểu thức chứa một căn dạng cơ bản:

Ví dụ: Phân tích nhân tử: $x + 2\sqrt{x+3}$

Đặt $\sqrt{x+3} = t \Rightarrow x = t^2 - 3$. Khi đó: $x + 2\sqrt{x+3} = t^2 + 2t - 3 = (t-1)(t+3)$.

Do đó thay ngược $t = \sqrt{x+3}$ ta được: $x + 2\sqrt{x+3} = \left(\sqrt{x+3} - 1\right)\left(\sqrt{x+3} + 3\right)$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1: Phân tích nhân tử: $2x+4-5\sqrt{x+1}$

Đáp án: $\left(2\sqrt{x+1}-1\right)\left(\sqrt{x+1}-2\right)$

Bài 2: Phân tích nhân tử: $2x+5+7\sqrt{2x-1}$

Đáp án: $\left(\sqrt{2x-1}+1\right)\left(\sqrt{2x-1}+6\right)$

IV. Kỹ năng 4: Phân tích nhân tử hai biến không chứa căn:

Ví dụ 1: Phân tích nhân tử: $x^2-2xy+y^2-x+y$ (Tối đa là bậc 2).

Thay $y=100$, biểu thức trở thành: $x^2-2xy+y^2-x+y=x^2-201x+10100$.

Bấm máy phương trình bậc 2 ta được 2 nghiệm: $x=100, x=101$.

Do đó: $x^2-201x+10100=(x-100)(x-101)$.

Vì $100=y, 101=100+1=y+1$, vậy: $x^2-2xy+y^2-x+y=(x-y)(x-y-1)$.

Ví dụ 2: Phân tích nhân tử: $x^3+2x^2y+xy^2+y^2+xy+3x+3y$.

Thay $y=100$, biểu thức trở thành:

$x^3+2x^2y+xy^2+y^2+xy+3x+3y=x^3+200x^2+10103x+10300$

Sử dụng SOLVE ta được $x=-100=-y$. Ta có hai cách xử lý sau:

Cách 1: Sử dụng CALC:

Thay $x=1000, y=\dfrac{1}{100}$ ta có: $\dfrac{x^3+2x^2y+xy^2+y^2+xy+3x+3y}{x+y}=1000013.01$

$$=1000^2+1000.\frac{1}{100}+3+\frac{1}{100}=x^2+xy+y+3$$

Hay nói cách khác phân tích đa thức nhân tử ta được kết quả:

$x^3+2x^2y+xy^2+y^2+xy+3x+3y=(x+y)\left(x^2+xy+y+3\right)$

Cách 2: Sơ đồ Hoorne:

x	1	200	10103	10300
−100	1	100	103	0

Vậy $\dfrac{x^3+200x^2+10103x+10300}{x+100}=x^2+100x+103$

Hay $x^3+2x^2y+xy^2+y^2+xy+3x+3y=(x+y)\left(x^2+xy+y+3\right)$.

Chú ý: Phương pháp này rất có ích cho các bài toán về chủ đề tương giao đồ thị hàm số bậc 3.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1: Phân tích nhân tử: $x^2-3xy+2y^2-y-1$

Đáp án: $(x-y+1)(x-2y-1)$

Bài 2: Phân tích nhân tử: $x^3+2xy^2-2y^3+x^2-xy-2y^2-x-y-1$

Đáp án: $(x^2-y-1)(x+2y^2+1)$

V. Kỹ năng 5: Khai căn biểu thức một biến không chứa căn:

Ví dụ: Rút gọn biểu thức: $\sqrt{x^4+6x^3+11x^2+6x+1}$

Gán $x=100$ ta có: $\sqrt{x^4+6x^3+11x^2+6x+1}=10301=|x^2+3x+1|$.

Ta cũng có thể viết: $x^4+6x^3+11x^2+6x+1=(x^2+3x+1)^2$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1: Rút gọn biểu thức: $\sqrt{x^4+2x^3+3x^2+2x+1}$

Đáp án: $\sqrt{x^4+2x^3+3x^2+2x+1}=x^2+x+1$

VI. Kỹ năng 6: Khai căn biểu thức một biến chứa căn:

Ví dụ: Rút gọn biểu thức: $\sqrt{x^4+2x^2+x+2(x^2+1)\sqrt{x-1}}$

Gán $x=3$ ta có: $\sqrt{x^4+2x^2+x+2(x^2+1)\sqrt{x-1}}=11.41421356=10+\sqrt{2}$

Gán $x=4$ ta có: $\sqrt{x^4+2x^2+x+2(x^2+1)\sqrt{x-1}}=18.73205081=17+\sqrt{3}$

Vậy $\sqrt{x^4+2x^2+x+2(x^2+1)\sqrt{x-1}}=A+\sqrt{x-1}$ vì $\begin{cases} x=3\Rightarrow\sqrt{x-1}=\sqrt{2} \\ x=4\Rightarrow\sqrt{x-1}=\sqrt{3}\end{cases}$

Xét $\sqrt{x^4+2x^2+x+2(x^2+1)\sqrt{x-1}}-\sqrt{x-1}$ CALC 100 ta có:

$\sqrt{x^4+2x^2+x+2(x^2+1)\sqrt{x-1}}-\sqrt{x-1}=10001=100^2+1=x^2+1$.

Vậy: $\sqrt{x^4+2x^2+x+2(x^2+1)\sqrt{x-1}}=x^2+1+\sqrt{x-1}$.

Ta cũng có thể viết: $x^4+2x^2+x+2(x^2+1)\sqrt{x-1}=(x^2+1+\sqrt{x-1})^2$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1: Rút gọn biểu thức: $\sqrt{x^2+2+2(x+1)\sqrt{1-2x}}$

Đáp án: $\sqrt{x^2+2+2(x+1)\sqrt{1-2x}}=|x+1+\sqrt{1-2x}|$

VII. Kỹ năng 7: Khai căn biểu thức hai biến:

Ví dụ 1: Rút gọn biểu thức: $\sqrt{x^4+2x^2y+y^2+2x^2+2y+1}$

Gán $x=1000, y=\frac{1}{100}$ ta có:

$\sqrt{x^4+2x^2y+y^2+2x^2+2y+1}=1000001.01=1000^2+1+\frac{1}{100}=\left|x^2+y+1\right|$

Ta cũng có thể viết: $x^4+2x^2y+y^2+2x^2+2y+1=\left(x^2+y+1\right)^2$.

Ví dụ 2: Rút gọn biểu thức: $\sqrt{x^2+(y+2)x+2+2(x+1)\sqrt{xy+1}}$

Gán $x=y=1$: $\sqrt{x^2+(y+2)x+2+2(x+1)\sqrt{xy+1}}=3.414213562=2+\sqrt{2}$

Gán $x=2, y=1$: $\sqrt{x^2+(y+2)x+2+2(x+1)\sqrt{xy+1}}=4.732050808=3+\sqrt{3}$

Chú ý rằng: $\begin{cases} x=y=1 \Rightarrow \sqrt{xy+1}=\sqrt{2} \\ x=2, y=1 \Rightarrow \sqrt{xy+1}=\sqrt{3} \end{cases}$. Do đó xét:

$\sqrt{x^2+(y+2)x+2+2(x+1)\sqrt{xy+1}}-\sqrt{xy+1}$ CALC $x=1000, y=\frac{1}{100}$:

$\sqrt{x^2+(y+2)x+2+2(x+1)\sqrt{xy+1}}-\sqrt{xy+1}=1001=x+1$

Vậy: $\sqrt{x^2+(y+2)x+2+2(x+1)\sqrt{xy+1}}=\left|x+1+\sqrt{xy+1}\right|$.

Ta cũng có thể viết: $x^2+(y+2)x+2+2(x+1)\sqrt{xy+1}=\left(x+1+\sqrt{xy+1}\right)^2$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1: Rút gọn biểu thức: $\sqrt{x^2+2xy+y^2+2x+2y+1}$

Đáp án: $\sqrt{x^2+2xy+y^2+2x+2y+1}=|x+y+1|$

Bài 2: Rút gọn biểu thức: $\sqrt{(x+1)^2+2y+2x\sqrt{2x+2y+1}}$

Đáp án: $\sqrt{(x+1)^2+2y+2x\sqrt{2x+2y+1}}=\left|x+\sqrt{2x+2y+1}\right|$

Chủ đề 2:
CÁC PHƯƠNG PHÁP XỬ LÝ BÀI TOÁN CHỨA NGHIỆM ĐƠN HỮU TỶ

I. Giới thiệu phương pháp nhân liên hợp:

Liên hợp căn bậc 2	Liên hợp căn bậc 3	Liên hợp căn bậc 3
$a-b=\dfrac{a^2-b^2}{a+b}$	$a-b=\dfrac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}$	$a+b=\dfrac{a^3+b^3}{a^2-ab+b^2}$

Chú ý: $a^2 \pm ab+b^2=\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}b^2+\frac{1}{2}(a\pm b)^2>0, \forall a,b$ không đồng thời bằng 0.

Nếu 2 căn có giá trị bằng nhau, ta có thể liên hợp 2 căn với nhau.

II. Ý nghĩa của phương pháp nhân liên hợp:

Giả sử phương trình $f(x)=0$ có nghiệm $x=3$ và trong phương trình có chứa căn thức $\sqrt{x+6}$, khi đó với $x=3 \Rightarrow \sqrt{x+6}=3$.

Vậy nếu sử dụng liên hợp: $\sqrt{x+6}-3=\dfrac{x+6-9}{\sqrt{x+6}+3}=\dfrac{x-3}{\sqrt{x+6}+3}$ khi đó sẽ xuất hiện nhân tử $(x-3)$ và có thể rút ra làm nhân tử chung.

Tuy nhiên, vì $x=3$ nên ta cũng có thể đánh giá $\sqrt{x+6}=3=x$.

Vậy nếu sử dụng liên hợp: $x-\sqrt{x+6}=\dfrac{x^2-x-6}{x+\sqrt{x+6}}=\dfrac{(x-3)(x+2)}{x+\sqrt{x+6}}$ ta cũng rút được nhân tử $(x-3)$.

Như vậy bản chất của phương pháp nhân liên hợp là rút ra nhân tử chung để chỉ ra nghiệm của phương trình. Khi hai đại lượng a và b có giá trị bằng nhau, ta có thể sử dụng nhân liên hợp giữa hai đại lượng này.

III. Sử dụng chức năng TABLE để phát hiện nghiệm của phương trình:

Để biết phương trình $x^2+\sqrt{x+7}=7$ có nghiệm gì, ta có thể sử dụng máy tính Casio để biết nghiệm của phương trình thông qua công cụ SOLVE, tuy nhiên nếu muốn biết chính xác *phương trình có bao nhiêu nghiệm* ta nên ưu tiên sử dụng công cụ TABLE (***Công cụ hình dung gần đúng hình dáng của đồ thị hàm số***) như sau:

Bước 1: Truy cập vào MODE 7 để sử dụng chức năng TABLE của máy tính. Chuyển phương trình sang một vế và xét hàm số sau: $f(x)=x^2+\sqrt{x+7}-7$	Math f(X)=X²+√(X+7)−7

Bước 2: Lựa chọn START $=-7$. START là giá trị khởi điểm của hàm số bạn muốn bắt đầu. Vì điều kiện $x\geq -7$ nên ta lựa chọn START $=-7$.	Math Start? -7
Bước 3: Lựa chọn END $=2$. END là giá trị kết thúc với biến x, thông thường ta chọn END theo công thức: END = START + 9.	Math End? 2
Bước 4: Lựa chọn STEP $=0.5$. STEP là giá trị yêu cầu các biến x sẽ cách nhau một giá trị là bao nhiêu? Thông thường lựa chọn STEP $=0.5$.	Math Step? 0.5
Bước 5: Nhận bảng giá trị và kết luận: Thông qua bảng giá trị hàm số ta nhận được, ta thấy phương trình có nghiệm duy nhất $x=2$. **Các câu hỏi thường gặp:** **Câu hỏi 1:** Nếu hàm số có tập xác định $D=\mathbb{R}$ thì lựa chọn thế nào? ***Trả lời:*** Khi đó ta chọn START $=-9$, END $=9$, STEP $=1$ để quét hầu hết các giá trị. **Câu hỏi 2:** Nếu tập xác định của hàm số nhỏ chẳng hạn $D=[2;3.5]$ thì lựa chọn thế nào? ***Trả lời:*** Khi đó ta chọn START $=2$, END $=3.5$, STEP $=0.1$. **Câu hỏi 3:** Nếu không thấy nghiệm của phương trình thì ta nên tư duy ra sao? ***Trả lời:*** Khi đó có 2 tình huống: 1. Nếu có 2 vùng $x=a, x=b$ hàm số đổi dấu thì phương trình có nghiệm trong (a; b), quay lại MODE 1 và SOLVE với giá trị khởi đầu $x=c\in(a;b)$. 2. Nếu không có khu vực nào hàm số đổi dấu ta lựa chọn STEP bé hơn	Math X | F(X) 1 | -7 | 42 2 | -6.5 | 35.957 3 | -6 | 30 -7 Math X | F(X) 4 | -5.5 | 24.474 5 | -5 | 19.414 6 | -4.5 | 14.831 -4.5 Math X | F(X) 7 | -4 | 10.732 8 | -3.5 | 7.1208 9 | -3 | 4 -3 Math X | F(X) 10 | -2.5 | 1.3713 11 | -2 | -0.763 12 | -1.5 | -2.404 -1.5 Math X | F(X) 13 | -1 | -3.55 14 | -0.5 | -4.2 15 | 0 | -4.354 0 Math X | F(X) 16 | 0.5 | -4.011 17 | 1 | -3.171 18 | 1.5 | -1.834 1.5 Math X | F(X) 17 | 1 | -3.171 18 | 1.5 | -1.834 19 | 2 | 0 1

chẳng hạn 0.2,0.1 để khảo sát kỹ hơn hoặc dùng SOLVE hỗ trợ tìm nghiệm. Nếu vẫn không tìm ra thì chứng tỏ phương trình vô nghiệm.

Câu hỏi 4: Nếu hàm số đồng biến hoặc nghịch biến được phát hiện qua TABLE thì sao?

Trả lời: Trong trường hợp đó, ta chú ý rằng khi $f(x)$ đơn điệu hay $f'(x)\ge 0$ hoặc $f'(x)\le 0,\forall x\in D$, khi đó:

- Phương trình: $f(x)=f(y)$ có tối đa một nghiệm $x=y\in D$.
- Bất phương trình: $f(x)>f(y), f'(x)\ge 0,\forall x,y\in D\Leftrightarrow x>y$.
- Bất phương trình: $f(x)>f(y), f'(x)\le 0,\forall x,y\in D\Leftrightarrow x<y$.
- Bất phương trình: $f(x)<f(y), f'(x)\le 0,\forall x,y\in D\Leftrightarrow x>y$.
- Bất phương trình: $f(x)<f(y), f'(x)\ge 0,\forall x,y\in D\Leftrightarrow x<y$.
- Bất phương trình: $f(x)\ge f(y), f'(x)\ge 0,\forall x,y\in D\Leftrightarrow x\ge y$.
- Bất phương trình: $f(x)\ge f(y), f'(x)\le 0,\forall x,y\in D\Leftrightarrow x\le y$.
- Bất phương trình: $f(x)\le f(y), f'(x)\le 0,\forall x,y\in D\Leftrightarrow x\ge y$.
- Bất phương trình: $f(x)\le f(y), f'(x)\ge 0,\forall x,y\in D\Leftrightarrow x\le y$.

Sử dụng TABLE là một nghệ thuật trong giải phương trình, bất phương trình. Bạn đọc cần thực hành qua nhiều bài tập để thành thạo kỹ năng này.

IV. Các phương pháp xử lý bài toán có một nghiệm đơn hữu tỷ:

Ví dụ: Giải bất phương trình sau trên tập số thực:
$(x-1)^2+\sqrt{x-1}-\sqrt{x+2}\le 0$

Phân tích

- Sử dụng TABLE tìm được: $x=2$.
- Nhân tử có thể sử dụng: $\begin{cases}\sqrt{x-1}=1=x-1\\ \sqrt{x+2}=2=x\end{cases}$
- Tính đơn điệu: Hàm số đơn điệu.

Bài giải

Cách 1: Sử dụng liên hợp căn với số:

Điều kiện xác định: $x\ge 1$.

Ta có: $(x-1)^2+\sqrt{x-1}-\sqrt{x+2}\le 0\Leftrightarrow \left(x^2-2x\right)+\left(\sqrt{x-1}-1\right)-\left(\sqrt{x+2}-2\right)\le 0$

$$\Leftrightarrow x^2-2x+\frac{x-2}{\sqrt{x-1}+1}-\frac{x-2}{\sqrt{x+2}+2}=(x-2)\left(x+\frac{1}{\sqrt{x-1}+1}-\frac{1}{\sqrt{x+2}+2}\right)\le 0$$

Phân tích: Ta nhận thấy biểu thức trong ngoặc

$x+\dfrac{1}{\sqrt{x-1}+1}-\dfrac{1}{\sqrt{x+2}+2}$ vẫn còn chứa dấu âm, lẽ nào vẫn còn nghiệm?

Thực chất khi sử dụng máy tính Casio từ đầu, phương trình chỉ có duy nhất nghiệm $x=2$ vì vậy chắc chắn biểu thức $x+\dfrac{1}{\sqrt{x-1}+1}-\dfrac{1}{\sqrt{x+2}+2}$ không còn nghiệm nào. Để chứng minh biểu thức vô nghiệm, ta có 2 cách:

- Cách 1: Với chức năng TABLE của máy tính Casio ta được:

$\max\dfrac{1}{\sqrt{x+2}+2}=0.5=\dfrac{1}{2}$

Chú ý rằng: $\max A=a$ thì biểu thức $(a-A)>0$ luôn đúng.

Do đó nếu sau khi liên hợp:

Xuất hiện $(A-)$, ta tìm $\min A$.

Xuất hiện $(-A)$, ta tìm $\max A$.

- Cách 2: Sử dụng đánh giá phụ: $\dfrac{1}{\sqrt{a}+b}\le\dfrac{1}{b}$ với $a\ge0,b>0$. Do đó ta tìm được: $\dfrac{1}{\sqrt{x+2}+2}\le\dfrac{1}{2}$, do đó ta tạo biểu thức: $\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{\sqrt{x+2}+2}\right)$.

Do đó: Bất phương trình $\Leftrightarrow(x-2)\left(x-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\sqrt{x-1}+1}+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{\sqrt{x+2}+2}\right)\right)\le0$

$\Leftrightarrow(x-2)\left(x-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\sqrt{x-1}+1}+\dfrac{\sqrt{x+2}}{2\left(\sqrt{x+2}+2\right)}\right)\le0$

Vì: $x-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\sqrt{x-1}+1}+\dfrac{\sqrt{x+2}}{2\left(\sqrt{x+2}+2\right)}>0,\forall x\ge1$. Do đó: $1\le x\le2$.

Kết luận: Tập nghiệm của bất phương trình: $S=[1;2]$.

Câu hỏi đặt ra: Làm thế nào để nhân liên hợp mà không bị mang dấu âm? Để trả lời câu hỏi này, ta cần biết đến **Phương pháp nhân liên hợp truy ngược dấu cấp độ 1** như sau:

- Nếu trong phương trình hay bất phương trình có chứa $\left(-\sqrt{a}\right)$ đồng thời có đánh giá $\sqrt{a}=b$ thì sử dụng liên hợp $\sqrt{a}\left(\sqrt{a}-b\right)=a-b\sqrt{a}$.

Ví dụ: $\sqrt{x+1}=2$ khi đó ta sử dụng liên hợp:

$\sqrt{x+1}\left(\sqrt{x+1}-2\right)=x+1-2\sqrt{x+1}$.

- Nếu trong phương trình hay bất phương trình có chứa $\left(-\sqrt[3]{a}\right)$ đồng thời $\sqrt[3]{a}=b$ thì sử dụng liên hợp $\left(\sqrt[3]{a}-b\right)\left(\sqrt[3]{a}+b\right)\sqrt[3]{a}=a-b^2\sqrt[3]{a}$.

Ví dụ: $\sqrt[3]{x+5}=2$ khi đó ta sử dụng liên hợp:
$\left(\sqrt[3]{x+5}-2\right)\left(\sqrt[3]{x+5}+2\right)\sqrt[3]{x+5}=x+5-4\sqrt[3]{x+5}$.

<u>Cách 2: Sử dụng truy ngược dấu cấp độ 1:</u>

Điều kiện xác định: $x\ge 1$.

Ta có: $(x-1)^2+\sqrt{x-1}-\sqrt{x+2}\le 0 \Leftrightarrow 2(x-1)^2+2\sqrt{x-1}-2\sqrt{x+2}\le 0$

$\Leftrightarrow \left(2x^2-5x+2\right)+2\left(\sqrt{x-1}-1\right)+\left(x+2-2\sqrt{x+2}\right)\le 0$

$\Leftrightarrow (x-2)(2x-1)+\dfrac{2(x-2)}{\sqrt{x-1}+1}+\sqrt{x+2}\left(\sqrt{x+2}-2\right)\le 0$

$\Leftrightarrow (x-2)(2x-1)+\dfrac{2(x-2)}{\sqrt{x-1}+1}+\dfrac{\sqrt{x+2}(x-2)}{\sqrt{x+2}+2}\le 0$

$\Leftrightarrow (x-2)\left(2x-1+\dfrac{2}{\sqrt{x-1}+1}+\dfrac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+2}+2}\right)\le 0.$

Vì: $2x-1+\dfrac{2}{\sqrt{x-1}+1}+\dfrac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+2}+2}>0,\forall x\ge 1$. Do đó: $1\le x\le 2$.

Kết luận: Tập nghiệm của bất phương trình: $S=[1;2]$.

Câu hỏi đặt ra: Điểm yếu của truy ngược dấu cấp độ 1 là việc phải nhân thêm với hệ số nếu muốn sử dụng. Vì vậy ta cần làm thế nào để vừa có thể nhân liên hợp sao cho biểu thức bên trong mang dấu không âm mà vẫn hạn chế được việc nhân thêm hệ số?

Để trả lời câu hỏi này, ta cần biết đến **Phương pháp nhân liên hợp truy ngược dấu cấp độ 2** như sau: Giả sử bài toán chứa $-\sqrt{x+3}$ và phương trình có nghiệm $x=1$. Khi đó ta đánh giá như sau:

$\sqrt{x+3}=2=x+1=2x=x^2+1=2x^2=\ldots$

Do đó ta có thể sử dụng các phương án liên hợp sau:

- $x+1-\sqrt{x+3}=\dfrac{x^2+x-2}{x+1+\sqrt{x+3}}=\dfrac{(x-1)(x+2)}{x+1+\sqrt{x+3}}$
- $2x-\sqrt{x+3}=\dfrac{4x^2-x-3}{2x+\sqrt{x+3}}=\dfrac{(x-1)(4x+3)}{2x+\sqrt{x+3}}$
- $x^2+1-\sqrt{x+3}=\dfrac{x^4+2x^2-x-2}{x^2+1+\sqrt{x+3}}=\dfrac{(x-1)\left(x^3+x^2+3x+2\right)}{x^2+1+\sqrt{x+3}}$
- $2x^2-\sqrt{x+3}=\dfrac{4x^4-x-3}{2x^2+\sqrt{x+3}}=\dfrac{(x-1)\left(4x^3+4x^2+4x+3\right)}{2x^2+\sqrt{x+3}}$

Việc lựa chọn liên hợp nào là một nghệ thuật và người sử dụng liên hợp trong quá trình làm bài cần phải là một nghệ sĩ, phải biết phối hợp giữa các điều kiện bài toán đưa ra ban đầu để từ đó quyết định đâu là liên hợp cần tìm.

Cách 3: Sử dụng truy ngược dấu cấp độ 2:

Điều kiện xác định: $x \ge 1$.

Ta có: $(x-1)^2 + \sqrt{x-1} - \sqrt{x+2} \le 0$

$\Leftrightarrow \left(x^2-3x+2\right) + \left(\sqrt{x-1}-1\right) + \left(x-\sqrt{x+2}\right) \le 0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x-2) + \dfrac{x-2}{\sqrt{x-1}+1} + \dfrac{x^2-x-2}{x+\sqrt{x+2}} \le 0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x-2) + \dfrac{x-2}{\sqrt{x-1}+1} + \dfrac{(x-2)(x+1)}{x+\sqrt{x+2}} \le 0$

$\Leftrightarrow (x-2)\left(x-1+\dfrac{1}{\sqrt{x-1}+1}+\dfrac{x+1}{x+\sqrt{x+2}}\right) \le 0.$

Vì: $x-1+\dfrac{1}{\sqrt{x-1}+1}+\dfrac{x+1}{x+\sqrt{x+2}} > 0, \forall x \ge 1$. Do đó: $1 \le x \le 2$.

Kết luận: Tập nghiệm của bất phương trình: $S = [1;2]$.

Câu hỏi đặt ra: Ngoài phương pháp nhân liên hợp, ta có thể hóa giải các bài toán phương trình, bất phương trình bằng những phương pháp nào?

Trả lời: Ngoài phương pháp nhân liên hợp, ta có thể hóa giải bằng:

- Đặt ẩn phụ.
- Phân tích nhân tử, nhóm hằng đẳng thức.
- Sử dụng tính đơn điệu của hàm số.

Cách 4: Sử dụng tính đơn điệu của hàm số:

Điều kiện xác định: $x \ge 1$.

Nhận thấy với $x = 1$, bất phương trình luôn đúng.

Với $x > 1$. Xét hàm số: $f(x) = x^2 - 2x + 1 + \sqrt{x-1} - \sqrt{x+2}$ tại $D = (1;+\infty)$.

Ta có: $f'(x) = 2x - 2 + \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}} - \dfrac{1}{2\sqrt{x+2}} = 2(x-1) + \dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x-1}}{2\sqrt{x-1}\sqrt{x+2}}$

$f'(x) = 2(x-1) + \dfrac{3}{2\sqrt{x-1}\sqrt{x+2}\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-1}\right)} > 0, \forall x > 1$.

Do đó $f(x)$ là hàm số đồng biến và liên tục trên $D = (1;+\infty)$.

Nhận thấy rằng $f(2) = 0$, do đó: $(x-1)^2 + \sqrt{x-1} - \sqrt{x+2} \le 0$

$\Leftrightarrow f(x) \le f(2) \Leftrightarrow x \le 2$. Kết hợp điều kiện ta có: $1 \le x \le 2$.

Kết luận: Tập nghiệm của bất phương trình: $S = [1;2]$.

V. Tóm tắt lý thuyết:

- Công cụ dò nghiệm: SOLVE và TABLE kết hợp.
- Nếu căn mang dấu dương, ta liên hợp căn với số (liên hợp cơ bản).
- Nếu căn mang dấu âm, ta sử dụng truy ngược dấu
  - $\sqrt{a} = b$: Xét liên hợp $\left(a - b\sqrt{a}\right) = \sqrt{a}\left(\sqrt{a} - b\right)$.
  - $\sqrt[3]{a} = b$: Xét liên hợp $\left(a - b^2\sqrt[3]{a}\right) = \sqrt[3]{a}\left(\sqrt[3]{a} - b\right)\left(\sqrt[3]{a} + b\right)$.
  - Hoặc sử dụng truy ngược dấu cấp độ 2 (Xem lại bài ví dụ).

- Nếu hai căn có cùng giá trị, ta liên hợp hai căn thức đó với nhau.
- Nếu sau khi liên hợp căn mang dấu âm, có thể lựa chọn cách xử lý:
  - Quy đồng.
  - Sử dụng TABLE tìm max hoặc min.
  - Sử dụng đánh giá phụ: $\frac{1}{\sqrt{a}+b}\le\frac{1}{b}$.

VI. Bài tập áp dụng:

Bài 1: Giải bất phương trình sau trên tập số thực:
$3(x-2)+\sqrt{3x+4}<3\sqrt{2x+1}+\sqrt{x-3}$

Phân tích

- Sử dụng TABLE tìm được: $x=4$.
- Nhân tử có thể sử dụng: $\begin{cases}\sqrt{3x+4}=4=x,\sqrt{x-3}=1=x-3\\ \sqrt{2x+1}=3,3\sqrt{2x+1}=9=2x+1\end{cases}$

Bài giải

Cách 1: Nhân liên hợp cơ bản:

Điều kiện xác định: $x\ge 3$.

Ta có: $3(x-2)+\sqrt{3x+4}<3\sqrt{2x+1}+\sqrt{x-3}$

$\Leftrightarrow 3(x-4)+\left(\sqrt{3x+4}-4\right)-3\left(\sqrt{2x+1}-3\right)-\left(\sqrt{x-3}-1\right)<0$

$\Leftrightarrow 3(x-4)+\frac{3(x-4)}{\sqrt{3x+4}+4}-\frac{6(x-4)}{\sqrt{2x+1}+3}-\frac{x-4}{\sqrt{x-3}+1}<0$

$\Leftrightarrow (x-4)\left(3+\frac{3}{\sqrt{3x+4}+4}-\frac{6}{\sqrt{2x+1}+3}-\frac{1}{\sqrt{x-3}+1}\right)<0$

$\Leftrightarrow (x-4)\left(\frac{3}{\sqrt{3x+4}+4}+2-\frac{6}{\sqrt{2x+1}+3}+1-\frac{1}{\sqrt{x-3}+1}\right)<0$

$\Leftrightarrow (x-4)\left(\frac{3}{\sqrt{3x+4}+4}+\frac{2\sqrt{2x+1}}{\sqrt{2x+1}+3}+\frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-3}+1}\right)<0 \Leftrightarrow 3\le x<4$.

Kết luận: Tập nghiệm của bất phương trình: $S=[3;4)$.

Cách 2: Truy ngược dấu cấp độ 1:

Điều kiện xác định: $x\ge 3$.

Ta có: $3(x-2)+\sqrt{3x+4}<3\sqrt{2x+1}+\sqrt{x-3}$

$\Leftrightarrow \left(2x+1-3\sqrt{2x+1}\right)+\left(\sqrt{3x+4}-4\right)+\left(x-3-\sqrt{x-3}\right)<0$

$\Leftrightarrow (x-4)\left(\frac{2\sqrt{2x+1}}{\sqrt{2x+1}+3}+\frac{3}{\sqrt{3x+4}+4}+\frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-3}+1}\right)<0 \Leftrightarrow 3\le x<4$

Kết luận: Tập nghiệm của bất phương trình: $S=[3;4)$.

Bài 2: Giải phương trình trên tập số thực:
$\sqrt[3]{x-9}+2x^2+3x=\sqrt{5x-1}+1$

(Học sinh giỏi thành phố Hà Nội 2013)

Phân tích

- Sử dụng TABLE tìm được: $x=1$.
- Nhân tử có thể sử dụng: $\begin{cases}\sqrt[3]{x-9}=-2=x-3\\ \sqrt{5x-1}=2=2x, 2\sqrt{5x-1}=4=5x-1\end{cases}$

Bài giải

Cách 1: Nhân liên hợp cơ bản:

Điều kiện xác định: $x\ge\frac{1}{5}$.

Ta có: $\sqrt[3]{x-9}+2x^2+3x=\sqrt{5x-1}+1$

$\Leftrightarrow\left(\sqrt[3]{x-9}+2\right)-\left(\sqrt{5x-1}-2\right)+\left(2x^2+3x-5\right)=0$

$\Leftrightarrow\frac{2(x-1)}{\left(\sqrt[3]{x-9}\right)^2-2\sqrt[3]{x-9}+4}-\frac{5(x-1)}{\sqrt{5x-1}+2}+(x-1)(2x+5)=0$

$\Leftrightarrow(x-1)\left(\frac{2}{\left(\sqrt[3]{x-9}\right)^2-2\sqrt[3]{x-9}+4}+2x+5-\frac{5}{\sqrt{5x-1}+2}\right)=0$

$\Leftrightarrow(x-1)\left(\frac{2}{\left(\sqrt[3]{x-9}-1\right)^2+3}+2x+\frac{5\sqrt{5x-1}+5}{\sqrt{5x-1}+2}\right)=0\Leftrightarrow x=1$.

Kết luận: Tập nghiệm của bất phương trình là $S=\{1\}$.

Cách 2: Truy ngược dấu cấp độ 1:

Điều kiện xác định: $x\ge\frac{1}{5}$.

Ta có: $\sqrt[3]{x-9}+2x^2+3x=\sqrt{5x-1}+1$

$\Leftrightarrow 2\sqrt[3]{x-9}+4x^2+6x-2\sqrt{5x-1}-2=0$

$\Leftrightarrow 2\left(\sqrt[3]{x-9}+2\right)+\left(5x-1-2\sqrt{5x-1}\right)+4x^2+x-5=0$

$\Leftrightarrow\frac{2(x-1)}{\left(\sqrt[3]{x-9}\right)^2-2\sqrt[3]{x-9}+4}+\frac{5(x-1)\sqrt{5x-1}}{\sqrt{5x-1}+2}+(x-1)(4x+5)$

$\Leftrightarrow(x-1)\left(\frac{2}{\left(\sqrt[3]{x-9}-1\right)^2+3}+\frac{5\sqrt{5x-1}}{\sqrt{5x-1}+2}+4x+5\right)=0\Leftrightarrow x=1$

Kết luận: Tập nghiệm của bất phương trình là $S=\{1\}$.

Bài 3: Giải phương trình trên tập số thực:

$2\sqrt{x^2-x+2}-\sqrt{2x^2+4x}=x-2$

Phân tích

- Sử dụng TABLE tìm được: $x=2$.
- Nhân tử có thể sử dụng: $\begin{cases}\sqrt{x^2-x+2}=2\\ \sqrt{2x^2+4x}=4\end{cases}\Rightarrow 2\sqrt{x^2-x+2}=\sqrt{2x^2+4x}$

Bài giải

Cách 1: Nhân liên hợp cơ bản:

Điều kiện xác định: $2x^2+4x\ge 0\Leftrightarrow x\ge 0\vee x\le -2$.

Ta có: $2\sqrt{x^2-x+2}-\sqrt{2x^2+4x}=x-2\Leftrightarrow \dfrac{2x^2-8x+8}{2\sqrt{x^2-x+2}+\sqrt{2x^2+4x}}=x-2$

$\Leftrightarrow (x-2)\left(\dfrac{2x-4}{2\sqrt{x^2-x+2}+\sqrt{2x^2+4x}}-1\right)=0$

$\Leftrightarrow (x-2)\left(2x-4-2\sqrt{x^2-x+2}-\sqrt{2x^2+4x}\right)=0$

Trường hợp 1: $x=2$ (Thỏa mãn điều kiện xác định).

Trường hợp 2: $2x-4=2\sqrt{x^2-x+2}+\sqrt{2x^2+4x}$. Kết hợp với phương trình ban đầu ta có: $\begin{cases}2x-4=2\sqrt{x^2-x+2}+\sqrt{2x^2+4x}\\ x-2=2\sqrt{x^2-x+2}-\sqrt{2x^2+4x}\end{cases}$.

Để giản ước căn thức, ta cộng vế với vế (hoặc trừ hai vế cũng được) ta có:

$3x-6=4\sqrt{x^2-x+2}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 2\\ (3x-6)^2=16\left(x^2-x+2\right)\end{cases}$ (Vô nghiệm).

Kết luận: Tập nghiệm của bất phương trình là $S=\{2\}$.

Cách 2: Nâng lũy thừa:

Điều kiện xác định: $2x^2+4x\ge 0\Leftrightarrow x\ge 0\vee x\le -2$.

Ta có: $2\sqrt{x^2-x+2}-\sqrt{2x^2+4x}=x-2\Leftrightarrow 2\sqrt{x^2-x+2}=(x-2)+\sqrt{2x^2+4x}$

Bình phương hai vế ta được:

$4\left(x^2-x+2\right)=(x-2)^2+2x^2+4x+2(x-2)\sqrt{2x^2+4x}$

$\Leftrightarrow (x-2)^2=2(x-2)\sqrt{2x^2+4x}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\ x-2=2\sqrt{2x^2+4x}\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\ (x-2)^2=4\left(2x^2+4x\right)\end{array}\right.\Leftrightarrow x=2$ (Thỏa mãn điều kiện xác định).

Kết luận: Tập nghiệm của bất phương trình là $S=\{2\}$.

Như vậy với những bài toán có căn vừa và nhỏ, hệ số không quá lớn, việc lựa chọn phương án nâng lũy thừa là rất khả thi. Yêu cầu lớn nhất đối với dạng bài này là học sinh cần có kỹ năng tính toán và biến đổi tốt, tránh nhầm lẫn trong quá trình tính toán.

Bài 4: Giải phương trình trên tập số thực:

$x+\sqrt{x^2-3}=\sqrt{2x^2-7}+\sqrt{2x^2-4}$

Phân tích

- Sử dụng TABLE tìm được: $x=2$.
- Nhân tử có thể sử dụng: $\begin{cases}\sqrt{x^2-3}=\sqrt{2x^2-7}=1\\ \sqrt{2x^2-4}=2=x\end{cases}$

Bài giải

Cách 1: Nhân liên hợp cơ bản:

Điều kiện xác định: $x \ge \frac{\sqrt{14}}{2} \vee x \le -\frac{\sqrt{14}}{2}$

Ta có: $x+\sqrt{x^2-3}=\sqrt{2x^2-7}+\sqrt{2x^2-4}$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{2x^2-7}-\sqrt{x^2-3}\right)+\left(\sqrt{2x^2-4}-x\right)=0$

$\Leftrightarrow \frac{x^2-4}{\sqrt{2x^2-7}+\sqrt{x^2-3}}+\frac{x^2-4}{\sqrt{2x^2-4}+x}=0$

$\Leftrightarrow \left(x^2-4\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2x^2-7}+\sqrt{x^2-3}}+\frac{1}{\sqrt{2x^2-4}+x}\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(x^2-4\right)\left(\frac{\sqrt{2x^2-4}+x+\sqrt{2x^2-7}+\sqrt{x^2-3}}{\left(\sqrt{2x^2-7}+\sqrt{x^2-3}\right)\left(\sqrt{2x^2-4}+x\right)}\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(x^2-4\right)\left(\sqrt{2x^2-4}+x+\sqrt{2x^2-7}+\sqrt{x^2-3}\right)=0.$

Trường hợp 1: $x^2=4 \Rightarrow x=\pm 2$. Thử lại nghiệm ta thấy nghiệm $x=-2$ không phải nghiệm của phương trình, còn nghiệm $x=2$ thì thỏa mãn.

Trường hợp 2: $\sqrt{2x^2-4}+x+\sqrt{2x^2-7}+\sqrt{x^2-3}=0$. Vì chưa khẳng định được phương trình này vô nghiệm do đó ta kết hợp với phương trình ban đầu ta có:

$\begin{cases} x+\sqrt{2x^2-4}+\sqrt{2x^2-7}+\sqrt{x^2-3}=0 \\ x-\sqrt{2x^2-4}-\sqrt{2x^2-7}+\sqrt{x^2-3}=0 \end{cases}$.

Trừ vế với vế ta được: $2\sqrt{2x^2-4}+2\sqrt{2x^2-7}=0$ (Vô nghiệm).

Kết luận: Tập nghiệm của bất phương trình là $S=\{2\}$.

Cách 2: Nâng lũy thừa:

Điều kiện xác định: $x \ge \frac{\sqrt{14}}{2} \vee x \le -\frac{\sqrt{14}}{2}$

Ta có: $x+\sqrt{x^2-3}=\sqrt{2x^2-7}+\sqrt{2x^2-4} \Leftrightarrow x-\sqrt{2x^2-7}=\sqrt{2x^2-4}-\sqrt{x^2-3}$

Bình phương hai vế của phương trình ta được:

$x^2-2x\sqrt{2x^2-7}+2x^2-7=2x^2-4-2\sqrt{\left(2x^2-4\right)\left(x^2-3\right)}+x^2-3$

$\Leftrightarrow x\sqrt{2x^2-7}=\sqrt{\left(2x^2-4\right)\left(x^2-3\right)} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x^2\left(2x^2-7\right)=\left(2x^2-4\right)\left(x^2-3\right) \end{cases}$

$\Leftrightarrow x=2$ (Thỏa mãn điều kiện).

Kết luận: Tập nghiệm của bất phương trình là $S=\{2\}$.

Qua các bài tập trên ta nhận thấy:

- ***Phương pháp nâng lũy thừa là một phương pháp giải tốt, hoàn toàn không thua kém gì so với các phương pháp giải khác.***

- ***Phương pháp nâng lũy thừa đặc biệt có lợi thế ưu việt trong các bài toán mà ta nhẩm được bậc không quá lớn sau khi nâng lũy thừa.***
- ***Bên cạnh đó, sau khi hoàn thành bài toán, học sinh cần thử lại cho chắc chắn.***
- ***Khi sử dụng TABLE ta thấy có duy nhất một nghiệm, vì vậy nếu xuất hiện nghiệm nữa (Gọi là nghiệm ngoại lai), ta cần thử lại để kiểm tra tính đúng đắn của nghiệm.***

Bài 5: Giải phương trình trên tập số thực:
$\sqrt{3x-2}-\sqrt{x+1}=2x^2-x-3$
(Trích đề thi Học sinh giỏi tỉnh Quảng Nam 2014)

Phân tích

- Sử dụng TABLE tìm được: $x=\frac{3}{2}$.
- Nhân tử có thể sử dụng: $\sqrt{3x-2}=\sqrt{x+1}=\frac{\sqrt{10}}{2}$

Bài giải

Điều kiện xác định: $x\ge\frac{2}{3}$.

Ta có: $\sqrt{3x-2}-\sqrt{x+1}=2x^2-x-3$

$$\Leftrightarrow\frac{\left(\sqrt{3x-2}-\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{3x-2}+\sqrt{x+1}\right)}{\left(\sqrt{3x-2}+\sqrt{x+1}\right)}=2x^2-x-3$$

$$\Leftrightarrow\frac{2x-3}{\left(\sqrt{3x-2}+\sqrt{x+1}\right)}=(2x-3)(x+1)\Leftrightarrow(2x-3)\left(x+1-\frac{1}{\left(\sqrt{3x-2}+\sqrt{x+1}\right)}\right)=0$$

Trường hợp 1: Với $2x-3=0\Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$ (Thỏa mãn điều kiện).

Trường hợp 2: Với $x+1-\frac{1}{\left(\sqrt{3x-2}+\sqrt{x+1}\right)}=0$

$\Leftrightarrow(x+1)\left(\sqrt{3x-2}+\sqrt{x+1}\right)=1$. Vì $x\ge\frac{2}{3}$ do đó:

$\Rightarrow(x+1)\left(\sqrt{3x-2}+\sqrt{x+1}\right)\ge(x+1)\sqrt{x+1}\ge\frac{5}{3}\sqrt{\frac{5}{3}}>1$

Vậy phương trình $x+1-\frac{1}{\left(\sqrt{3x-2}+\sqrt{x+1}\right)}=0$ vô nghiệm.

Kết luận: Tập nghiệm của bất phương trình là $S=\left\{\frac{3}{2}\right\}$.

Bài 6: Giải phương trình trên tập số thực:

$\sqrt{x+1}-2\sqrt{4-x}=\frac{5(x-3)}{2x^2+18}$

(Trích đề thi thử Đại học Chuyên Nguyễn Trãi Hải Dương 2013)

Phân tích

- Sử dụng TABLE tìm được: $x=3$.
- Nhân tử có thể sử dụng: $\begin{cases}\sqrt{x+1}=2\\ \sqrt{4-x}=1\end{cases} \Rightarrow \sqrt{x+1}=2\sqrt{4-x}$
- Tính đơn điệu: Hàm số đơn điệu.

Bài giải

Cách 1: Nhân liên hợp cơ bản:

Điều kiện xác định: $-1\le x\le 4$.

Ta có: $\sqrt{x+1}-2\sqrt{4-x}=\dfrac{5(x-3)}{2x^2+18} \Leftrightarrow \sqrt{2x^2+18}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{16-4x}\right)=5(x-3)$

$\Leftrightarrow \dfrac{5(x-3)\sqrt{2x^2+18}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{16-4x}}=5(x-3) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=3\\ \sqrt{2x^2+18}=\sqrt{x+1}+\sqrt{16-4x}\end{array}\right.$

Trường hợp 1: $x=3$ (Thỏa mãn điều kiện xác định). Thay vào phương trình ta thấy đây là một nghiệm thỏa mãn.

Trường hợp 2: $\sqrt{2x^2+18}=\sqrt{x+1}+\sqrt{16-4x}$. Bình phương hai vế ta được:

$\Leftrightarrow 2x^2+3x+1=4\sqrt{(x+1)(4-x)} \Leftrightarrow 4\sqrt{-x^2+3x+4}=2x^2+3x+1$

$\Leftrightarrow \begin{cases}16\left(-x^2+3x+4\right)=\left(2x^2+3x+1\right)^2\\ 2x^2+3x+1\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left(2x^2-x-3\right)\left(2x^2+7x+21\right)=0\\ 2x^2+3x+1\ge 0\end{cases}$

$\Leftrightarrow x=-1 \vee x=\dfrac{3}{2}$. Thử lại ta thấy các nghiệm này không thỏa mãn phương trình ban đầu.

Kết luận: Tập nghiệm của bất phương trình là $S=\{3\}$.

Cách 2: Sử dụng tính đơn điệu của hàm số:

Điều kiện: $-1\le x\le 4$. Nhận xét: $x=-1, x=4$ không phải nghiệm của phương trình do đó xét $f(x)=\sqrt{x+1}-2\sqrt{4-x}-\dfrac{5(x-3)}{2x^2+18}$ với $x\in(-1;4)$.

Ta có: $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{4-x}}+\dfrac{10\left(x^2-6x-9\right)}{\left(2x^2+18\right)^2}$.

$\Leftrightarrow f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{4-x}}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{10\left(x^2-6x-9\right)}{\left(2x^2+18\right)^2}+\dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow f'(x)=\dfrac{\sqrt{4-x}+\sqrt{4x+4}-\sqrt{x+1}\sqrt{4-x}}{2\sqrt{x+1}\sqrt{4-x}}+\dfrac{2x^4+46x^2-60x+72}{\left(2x^2+18\right)^2}$

Vì: $\sqrt{4-x}+\sqrt{4x+4}-\sqrt{x+1}\sqrt{4-x}=\dfrac{x^2+4+\sqrt{x+1}\sqrt{4-x}}{\sqrt{4-x}+\sqrt{4x+4}+\sqrt{x+1}\sqrt{4-x}}>0$.

Và: $2x^4+46x^2-60x+72=2x^4+46\left(x-\dfrac{15}{23}\right)^2+\dfrac{1206}{23}>0$.

Do đó: $\Leftrightarrow f'(x)>0, \forall x \in (-1;4)$. Vậy $f(x)$ là hàm số đồng biến và liên tục khi $x \in (-1;4)$. Do đó phương trình $f(x)=0$ có tối đa một nghiệm.

Mặt khác $f(3)=0$ do vậy $x=3$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Kết luận: Tập nghiệm của bất phương trình là $S=\{3\}$.

Chú ý: Công cụ TABLE tìm max, min có hiệu quả rất tốt trong việc xử lý chứng minh các phương trình vô nghiệm hoặc các hàm số đơn điệu.

Bài 7: Giải phương trình trên tập số thực:
$3x^2+10x+\sqrt{3x+3}=x^3+26+\sqrt{5-2x}$

Phân tích

- Sử dụng TABLE tìm được: $x=2$.
- Nhân tử có thể sử dụng: $\begin{cases}\sqrt{3x+3}=3=x+1\\ \sqrt{5-2x}=1=5-2x\end{cases}$

Bài giải

Điều kiện xác định: $\begin{cases}3x+3\geq 0\\ 5-2x\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow -1\leq x\leq \frac{5}{2}$.

Ta có: $3x^2+10x+\sqrt{3x+3}=x^3+26+\sqrt{5-2x}$

$\Leftrightarrow x^3-3x^2-10x+24-\left(\sqrt{3x+3}-3\right)+\left(\sqrt{5-2x}-1\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(x^2-x-12\right)(x-2)-\frac{3(x-2)}{\sqrt{3x+3}+3}-\frac{2(x-2)}{1+\sqrt{5-2x}}=0$

$\Leftrightarrow (x-2)\left[x^2-x-12-\frac{3}{\sqrt{3x+3}+3}-\frac{2}{\sqrt{5-2x}+1}\right]=0$

$\Leftrightarrow (x-2)\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{49}{4}-\frac{3}{\sqrt{3x+3}+3}-\frac{2}{\sqrt{5-2x}+1}\right]=0$

Vì $-1\leq x\leq \frac{5}{2}$ do đó: $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{49}{4}<0$ vậy $x=2$ là nghiệm duy nhất.

Kết luận: Tập nghiệm của bất phương trình là $S=\{2\}$.

Bài 8: Giải phương trình trên tập số thực:
$\sqrt{3x^2-4x+2}+\sqrt{3x+1}+\sqrt{2x-1}+6x^3-7x^2-3=0$

Phân tích

- Sử dụng TABLE tìm được: $x=1$.
- Nhân tử có thể sử dụng: $\begin{cases}\sqrt{2x-1}=1, \sqrt{3x+1}=2\\ \sqrt{3x^2-4x+2}=1\end{cases}$

Bài giải

Điều kiện xác định: $\begin{cases}2x-1\geq 0;\ 3x+1\geq 0\\ 3x^2-4x+2\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow x\geq \frac{1}{2}$.

Ta có: $\sqrt{3x^2-4x+2}+\sqrt{3x+1}+\sqrt{2x-1}+6x^3-7x^2-3=0$

$\Leftrightarrow\left(\sqrt{3x^2-4x+2}-1\right)+\left(\sqrt{3x+1}-2\right)+\left(\sqrt{2x-1}-1\right)+6x^3-7x^2+1=0$

$\Leftrightarrow\frac{3x^2-4x+1}{\sqrt{3x^2-4x+2}+1}+\frac{3x-3}{\sqrt{3x+1}+2}+\frac{2x-2}{\sqrt{2x+1}+1}+6x^3-7x^2+1=0$

$\Leftrightarrow\frac{(x-1)(3x-1)}{\sqrt{3x^2-4x+2}+1}+\frac{3(x-1)}{\sqrt{3x+1}+2}+\frac{2(x-1)}{\sqrt{2x+1}+1}+(x-1)(6x^2+6x-1)=0$

$\Leftrightarrow(x-1)\left(\frac{3x-1}{\sqrt{3x^2-4x+2}+1}+\frac{3}{\sqrt{3x+1}+2}+\frac{2}{\sqrt{2x+1}+1}+6x^2+6x-1\right)=0$

$\Leftrightarrow(x-1)\left(\frac{3x-1}{\sqrt{3x^2-4x+2}+1}+\frac{3}{\sqrt{3x+1}+2}+\frac{2}{\sqrt{2x+1}+1}+6\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{2}\right)=0$

Vì $x\geq\frac{1}{2}$ do đó: $6\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{2}>0$. Vậy $x=1$ là nghiệm duy nhất.

Kết luận: Tập nghiệm của bất phương trình là $S=\{1\}$.

Bài 9: Giải bất phương trình trên tập số thực:

$5+\sqrt{x^2+x+4}>\sqrt{3x+4}+\frac{10}{x}$

Phân tích

- Sử dụng TABLE tìm được: $x=2$.
- Nhân tử có thể sử dụng: $5=\frac{10}{x};\sqrt{x^2+x+4}=\sqrt{3x+4}$

Bài giải

Điều kiện xác định: $x\in\left[-\frac{4}{3};+\infty\right)\setminus\{0\}$.

Ta có: $5+\sqrt{x^2+x+4}>\sqrt{3x+4}+\frac{10}{x}\Leftrightarrow\left(5-\frac{10}{x}\right)+\left(\sqrt{x^2+x+4}-\sqrt{3x+4}\right)>0$

$\Leftrightarrow\frac{5(x-2)}{x}+\frac{x(x-2)}{\sqrt{x^2+x+4}+\sqrt{3x+4}}>0$

$\Leftrightarrow(x-2)\left(\frac{5}{x}+\frac{x}{\sqrt{x^2+x+4}+\sqrt{3x+4}}\right)>0$

$\Leftrightarrow\frac{(x-2)\left(5\sqrt{x^2+x+4}+5\sqrt{3x+4}+x^2\right)}{x\left(\sqrt{x^2+x+4}+\sqrt{3x+4}\right)}>0\Leftrightarrow\frac{x-2}{x}>0$.

Kết hợp điều kiện ta được: $\left[\begin{array}{l}x>2\\-\frac{4}{3}\leq x<0\end{array}\right.$.

Kết luận: Tập nghiệm của bất phương trình là $S=\left[-\frac{4}{3};0\right)\cup(2;+\infty)$.

Bài 10: Giải phương trình trên tập số thực:
$\sqrt{x^2+15}=3x-2+\sqrt{x^2+8}$

Phân tích

- Sử dụng TABLE tìm được: $x=1$.
- Nhân tử có thể sử dụng: $\sqrt{x^2+15}=4;\sqrt{x^2+8}=3;3x=3$

Bài giải

Điều kiện xác định: $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $\sqrt{x^2+15}=3x-2+\sqrt{x^2+8} \Leftrightarrow \sqrt{x^2+15}-4=\left(\sqrt{x^2+8}-3\right)+(3x-3)$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-1}{\sqrt{x^2+15}+4}=\frac{x^2-1}{\sqrt{x^2+8}+3}+3(x-1)$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left(\frac{x+1}{\sqrt{x^2+15}+4}-\frac{x+1}{\sqrt{x^2+8}+3}-3\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left((x+1)\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+15}+4}-\frac{1}{\sqrt{x^2+8}+3}\right)-3\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left(\frac{(x+1)\left(\sqrt{x^2+8}-\sqrt{x^2+15}-1\right)}{\left(\sqrt{x^2+15}+4\right)\left(\sqrt{x^2+8}+3\right)}-3\right)=0.$$

Điều kiện có nghiệm: Vì $\sqrt{x^2+15}>\sqrt{x^2+8}$

$\Rightarrow \sqrt{x^2+15}=3x-2+\sqrt{x^2+8}>\sqrt{x^2+8} \Rightarrow x>\frac{2}{3}$.

Do đó: $\frac{(x+1)\left(\sqrt{x^2+8}-\sqrt{x^2+15}-1\right)}{\left(\sqrt{x^2+15}+4\right)\left(\sqrt{x^2+8}+3\right)}-3<0$. Vậy $x=1$ (Thỏa mãn).

Kết luận: Tập nghiệm của bất phương trình là $S=\{1\}$.

Bài 11: Giải phương trình trên tập số thực:
$\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}+\sqrt{2x-5}=2x^2-5x$

(Đề nghị Olympic 30/04/2013)

Phân tích

- Sử dụng TABLE tìm được: $x=3$.
- Nhân tử có thể sử dụng: $\begin{cases}1=\sqrt{4-x}\\ \sqrt{x-2}=1=x-2\\ \sqrt{2x-5}=1=2x-5\end{cases}$

Bài giải

Điều kiện xác định: $x\in[2;4]$.

Ta có: $\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}+\sqrt{2x-5}=2x^2-5x$

$\Leftrightarrow 2x^2-8x+6+\left(1-\sqrt{4-x}\right)+\left(x-2-\sqrt{x-2}\right)+\left(2x-5-\sqrt{2x-5}\right)=0$

$$\Leftrightarrow 2(x-1)(x-3)+\frac{x-3}{1+\sqrt{4-x}}+\frac{(x-3)\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-2}+1}+\frac{2(x-3)\sqrt{2x-5}}{\sqrt{2x-5}+1}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)\left(2(x-1)+\frac{1}{1+\sqrt{4-x}}+\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-2}+1}+\frac{2\sqrt{2x-5}}{\sqrt{2x-5}+1}\right)=0.$$

Vì $2(x-1)+\frac{1}{1+\sqrt{4-x}}+\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-2}+1}+\frac{2\sqrt{2x-5}}{\sqrt{2x-5}+1}>0, \forall x\in[2;4]$.

Do đó: $x=3$ (Thỏa mãn điều kiện xác định).

Kết luận: Tập nghiệm của bất phương trình là $S=\{3\}$.

Bài 12: Giải bất phương trình trên tập số thực:

$\left(\sqrt{x-1}\right)^3+(2x-1)\sqrt{2x-3}+x^2-5x+2>0$

Phân tích

- Sử dụng TABLE tìm được: $x=2$.
- Nhân tử có thể sử dụng: $\sqrt{x-1}=1, \sqrt{2x-3}=1$.

Bài giải

Điều kiện xác định: $x\ge\frac{3}{2}$.

Ta có: $\left(\sqrt{x-1}\right)^3+(2x-1)\sqrt{2x-3}+x^2-5x+2>0$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left(\sqrt{x-1}-1\right)+(2x-1)\left(\sqrt{2x-3}-1\right)+x^2-2x>0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left(\frac{x-1}{\sqrt{x-1}+1}+\frac{2(2x-1)}{\sqrt{2x-3}+1}+x\right)>0.$$

Vì $\frac{x-1}{\sqrt{x-1}+1}+\frac{2(2x-1)}{\sqrt{2x-3}+1}+x>0, \forall x\ge\frac{3}{2}$. Do đó: $x>2$.

Kết luận: Tập nghiệm của bất phương trình là $S=(2;+\infty)$.

Bài 13: Giải bất phương trình trên tập số thực:

$\sqrt[3]{x-1}>\sqrt{x-7+2\sqrt{x-8}}$

Phân tích

- Sử dụng TABLE tìm được: $x=9$.

Bài giải

Điều kiện xác định: $x\ge 8$.

Ta có: $\sqrt[3]{x-1}>\sqrt{x-7+2\sqrt{x-8}} \Leftrightarrow \sqrt[3]{x-1}>\sqrt{\left(\sqrt{x-8}+1\right)^2}$

$\Leftrightarrow \sqrt[3]{x-1}>\sqrt{x-8}+1$. Lập phương 2 vế ta có:

$$x-1>(x-8)\sqrt{x-8}+3(x-8)+3\sqrt{x-8}+1 \Leftrightarrow 2x-22+(x-5)\sqrt{x-8}<0$$

$$\Leftrightarrow 2(x-9)+\left((x-5)\sqrt{x-8}-4\right)<0 \Leftrightarrow 2(x-9)+\frac{(x-9)\left(x^2-9x+24\right)}{(x-5)\sqrt{x-8}+4}<0$$

$$\Leftrightarrow (x-9)\left(2+\frac{x^2-9x+24}{(x-5)\sqrt{x-8}+4}\right)<0 \Leftrightarrow (x-9)\left(2+\frac{\left(x-\frac{9}{2}\right)^2+\frac{15}{4}}{(x-5)\sqrt{x-8}+4}\right)<0$$

$\Leftrightarrow x<9$. Kết hợp điều kiện ta có: $8\le x<9$.

Kết luận: Tập nghiệm của bất phương trình là $S=[8;9)$.

Bài 14: Giải bất phương trình trên tập số thực:
$\sqrt{3x-4}+x^2+2>3x+\sqrt{x}$

Phân tích

- Sử dụng TABLE tìm được: $x=2$.
- Nhân tử có thể sử dụng: $\sqrt{3x-4}=\sqrt{x}$.

Bài giải

Điều kiện xác định: $x\ge\frac{4}{3}$.

Ta có: $\sqrt{3x-4}+x^2+2>3x+\sqrt{x} \Leftrightarrow \left(\sqrt{3x-4}-\sqrt{x}\right)+\left(x^2-3x+2\right)>0$

$$\Leftrightarrow \frac{2(x-2)}{\sqrt{3x-4}+\sqrt{x}}+(x-1)(x-2)>0 \Leftrightarrow (x-2)\left(\frac{2}{\sqrt{3x-4}+\sqrt{x}}+x-1\right)>0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left(\frac{2}{\sqrt{3x-4}+\sqrt{x}}+\left(x-\frac{4}{3}\right)+\frac{1}{3}\right)>0 \Leftrightarrow x>2.$$

Kết luận: Tập nghiệm của bất phương trình là $S=(2;+\infty)$.

Bài 15: Giải bất phương trình trên tập số thực:
$\sqrt{2x+3}-\sqrt{x+4}+2x^2+3x<5$

Phân tích

- Sử dụng TABLE tìm được: $x=1$.
- Nhân tử có thể sử dụng: $\sqrt{2x+3}=\sqrt{x+4}$.

Bài giải

Điều kiện xác định: $x\ge-\frac{3}{2}$.

Ta có: $\sqrt{2x+3}-\sqrt{x+4}+2x^2+3x<5 \Leftrightarrow \left(\sqrt{2x+3}-\sqrt{x+4}\right)+\left(2x^2+3x-5\right)<0$

$$\Leftrightarrow \frac{x-1}{\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+4}}+(2x+5)(x-1)<0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left(\frac{1}{\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+4}}+2x+5\right)<0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left(\frac{1}{\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+4}}+(2x+3)+2\right)<0 \Leftrightarrow x<1.$$

Kết hợp điều kiện ta có: $-\frac{3}{2}\le x<1$.

Kết luận: Tập nghiệm của bất phương trình là $S=\left[-\frac{3}{2};1\right)$.

Bài 16: Giải bất phương trình trên tập số thực:
$2x+14+\sqrt{3x+1}>(x+8)\sqrt{x+3}$

Phân tích

- Sử dụng TABLE tìm được: $x=1$.
- Nhân tử có thể sử dụng: $\sqrt{x+3}=2,\sqrt{3x+1}=2$.

Bài giải

Điều kiện xác định: $x\geq -\frac{1}{3}$.

Ta có: $2x+14+\sqrt{3x+1}>(x+8)\sqrt{x+3}$

$\Leftrightarrow (x+8)\left(\sqrt{x+3}-2\right)-\left(\sqrt{3x+1}-2\right)<0$

$\Leftrightarrow (x-1)\left(\frac{x+8}{\sqrt{x+3}+2}-\frac{3}{\sqrt{3x+1}+2}\right)<0$

$\Leftrightarrow (x-1)\left(\left(\frac{x+8}{\sqrt{x+3}+2}-\frac{3}{2}\right)+\left(\frac{3}{2}-\frac{3}{\sqrt{3x+1}+2}\right)\right)<0$

$\Leftrightarrow (x-1)\left(\frac{2x+10-3\sqrt{x+3}}{2\left(\sqrt{x+3}+2\right)}+\frac{3\sqrt{3x+1}}{\sqrt{3x+1}+2}\right)<0$

$\Leftrightarrow (x-1)\left(\frac{4x^2+31x+73}{2\left(\sqrt{x+3}+2\right)\left(2x+10+3\sqrt{x+3}\right)}+\frac{3\sqrt{3x+1}}{\sqrt{3x+1}+2}\right)<0 \Leftrightarrow x<1.$

Kết hợp điều kiện ta có: $-\frac{1}{3}\leq x<1$.

Kết luận: Tập nghiệm của bất phương trình là $S=\left[-\frac{1}{3};1\right)$.

Bài 17: Giải bất phương trình trên tập số thực:
$x^3+5x+(x-2)\sqrt{x+1}>4x^2+4-\sqrt{x+2}$

Phân tích

- Sử dụng TABLE tìm được: $x=2$.
- Nhân tử có thể sử dụng: $\sqrt{x+2}=2$.

Bài giải

Điều kiện xác định: $x\geq -1$.

Ta có: $x^3+5x+(x-2)\sqrt{x+1}>4x^2+4-\sqrt{x+2}$

$\Leftrightarrow \left(x^3-4x^2+5x-2\right)+(x-2)\sqrt{x+1}+\left(\sqrt{x+2}-2\right)>0$

$\Leftrightarrow (x-2)\left((x-1)^2+\sqrt{x+1}+\frac{1}{\sqrt{x+2}+2}\right)>0 \Leftrightarrow x>2$

Kết luận: Tập nghiệm của bất phương trình là $S=(2;+\infty)$.

Bài 18: Giải bất phương trình trên tập số thực:
$\sqrt{x-1}+\sqrt{3x+1}+\sqrt{x^3+x^2-2}<2x$

Phân tích

- Sử dụng TABLE tìm được: $x=1$.
- Nhân tử có thể sử dụng: $\sqrt{3x+1}=2$.

Bài giải

Điều kiện xác định: $x\geq 1$.

Ta có: $\sqrt{x-1}+\sqrt{3x+1}+\sqrt{x^3+x^2-2}<2x$

$\Leftrightarrow \sqrt{x-1}+\left(\sqrt{3x+1}-2\right)+\sqrt{x^3+x^2-2}-2(x-1)<0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x-1}+\left(\sqrt{3x+1}-2\right)+\left(\sqrt{x-1}\sqrt{x^2+2x+2}-2(x-1)\right)<0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x-1}+\dfrac{3(x-1)}{\sqrt{3x+1}+2}+\sqrt{x-1}\left(\sqrt{x^2+2x+2}-2\sqrt{x-1}\right)<0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x-1}\left(1+\dfrac{3\sqrt{x-1}}{\sqrt{3x+1}+2}+\dfrac{x^2-2x+6}{\sqrt{x^2+2x+2}+2\sqrt{x-1}}\right)<0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x-1}<0$ (Bất phương trình vô nghiệm).

Kết luận: Tập nghiệm của bất phương trình là $S=\varnothing$.

Bài 19: Giải bất phương trình trên tập số thực:
$(x-2)\left(1+\sqrt{\sqrt{3-x}+1}\right)\leq 2\sqrt{3-x}+2$

Phân tích

- Sử dụng TABLE tìm được: $x=3$.

Bài giải

Điều kiện xác định: $x\leq 3$.

Đặt $\sqrt{3-x}=t$, ta có: $x=3-t^2\Rightarrow\left(1-t^2\right)\left(1+\sqrt{t+1}\right)\leq 2t+2$

$\Leftrightarrow t^2+2t+1-\left(1-t^2\right)\sqrt{t+1}\leq 0\Leftrightarrow t^2+2t+1-\sqrt{t+1}+t^2\sqrt{t+1}\leq 0$

$\Leftrightarrow\left(t^2+t\right)+\left(t+1-\sqrt{t+1}\right)+t^2\sqrt{t+1}\leq 0\Leftrightarrow t\left(t+1+\dfrac{\sqrt{t+1}}{\sqrt{t+1}+1}+t\sqrt{t+1}\right)\leq 0$

$\Leftrightarrow\sqrt{3-x}\left(\sqrt{3-x}+1+\dfrac{\sqrt{\sqrt{3-x}+1}}{1+\sqrt{\sqrt{3-x}+1}}+\sqrt{3-x}\sqrt{\sqrt{3-x}+1}\right)\leq 0\Leftrightarrow x=3$

Kết luận: Tập nghiệm của bất phương trình là $S=\{3\}$.

Bài 20: Giải phương trình trên tập số thực:
$\sqrt{x+1}-1=\sqrt{x-\sqrt{x+8}}$

Phân tích

- Sử dụng TABLE tìm được: $x=8$.
- Nhân tử có thể sử dụng: $\sqrt{x+8}=4\Rightarrow 4\sqrt{x+8}=16=x+8$.

Bài giải

Điều kiện xác định: $x\geq -1$.

Điều kiện có nghiệm: $x-\sqrt{x+8}\geq 0\Rightarrow x\geq 0\Rightarrow\sqrt{x+1}-1\geq 0$.

Ta có: $\sqrt{x+1}-1>\sqrt{x-\sqrt{x+8}}$. Bình phương hai vế ta được:

$x+1=1+x-\sqrt{x+8}+2\sqrt{x-\sqrt{x+8}} \Leftrightarrow \sqrt{x+8}=2\sqrt{x-\sqrt{x+8}}$.

Bình phương 2 vế ta được: $x+8=4x-4\sqrt{x+8} \Leftrightarrow 3x-8-4\sqrt{x+8}=0$

$\Leftrightarrow \left(x+8-4\sqrt{x+8}\right)+\left(2x-16\right)=0 \Leftrightarrow \sqrt{x+8}\left(\sqrt{x+8}-4\right)+2\left(x-8\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(x-8\right)\left(\frac{\sqrt{x+8}}{\sqrt{x+8}+4}+2\right)=0 \Leftrightarrow x=8$.

Kết luận: Tập nghiệm của bất phương trình là $S=\{8\}$.

Bài 21: Giải bất phương trình trên tập số thực:

$$\frac{1}{\sqrt{2x+3}}-\frac{1}{\sqrt{x+4}}>\frac{x^3-1}{\sqrt{x^2-2x+5}-1}$$

Phân tích

- Sử dụng TABLE tìm được: $x=1$.
- Nhân tử có thể sử dụng: $\frac{1}{\sqrt{2x+3}}=\frac{1}{\sqrt{x+4}};x^3=1$.

Bài giải

Điều kiện xác định: $x>-\frac{3}{2}$.

Ta có: $\frac{1}{\sqrt{2x+3}}-\frac{1}{\sqrt{x+4}}>\frac{x^3-1}{\sqrt{x^2-2x+5}-1}$

$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2x+3}-\sqrt{x+4}}{\sqrt{x+4}\sqrt{2x+3}}+\frac{x^3-1}{\sqrt{x^2-2x+5}-1}<0$

$\Leftrightarrow \frac{x-1}{\sqrt{x+4}\sqrt{2x+3}\left(\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+4}\right)}+\frac{\left(x-1\right)\left(x^2+x+1\right)}{\sqrt{x^2-2x+5}-1}<0$

$$\Leftrightarrow \left(x-1\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x+4}\sqrt{2x+3}\left(\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+4}\right)}+\frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}{\sqrt{\left(x-1\right)^2+4}-1}\right)<0.$$

Vì $\sqrt{\left(x-1\right)^2+4}-1\geq\sqrt{4}-1>0 \Rightarrow \frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}{\sqrt{\left(x-1\right)^2+4}-1}>0 \Rightarrow x<1$.

Kết hợp điều kiện ta có: $-\frac{3}{2}<x<1$.

Kết luận: Tập nghiệm của bất phương trình là $S=\left(-\frac{3}{2};1\right)$.

Bài 22: Giải bất phương trình trên tập số thực:
$\sqrt{x-1}+2\sqrt{x+2}>5+\left(2x^2-5x+2\right)\sqrt{x+3}$

Phân tích

- Sử dụng TABLE tìm được: $x=2$.
- Nhân tử có thể sử dụng: $\sqrt{x-1}=1;\sqrt{x+2}=2$.

Bài giải

Điều kiện xác định: $x\ge 1$.

Ta có: $\sqrt{x-1}+2\sqrt{x+2}>5+\left(2x^2-5x+2\right)\sqrt{x+3}$

$$\Leftrightarrow (x-2)(2x-1)\sqrt{x+3}-\left(\sqrt{x-1}-1\right)-2\left(\sqrt{x+2}-2\right)<0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left((2x-1)\sqrt{x+3}-\frac{1}{\sqrt{x-1}+1}-\frac{2}{\sqrt{x+2}+2}\right)<0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left(\left[\left(2(x-1)+1\right)\sqrt{(x-1)+4}-2\right]+1-\frac{1}{\sqrt{x-1}+1}+1-\frac{2}{\sqrt{x+2}+2}\right)<0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left(\left[\left(2(x-1)+1\right)\sqrt{(x-1)+4}-2\right]+\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}+1}+\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+2}+2}\right)<0$$

Chú ý rằng: $\left(2(x-1)+1\right)\sqrt{(x-1)+4}-2\ge 0,\forall x\ge 1$. Vậy $1\le x<2$.

Kết luận: Tập nghiệm của bất phương trình là $S=[1;2)$.

Bài 23: Giải bất phương trình trên tập số thực:
$x^3+4x+(x-1)\sqrt{2x+1}<3x^2+\sqrt{x+3}$

Phân tích

- Sử dụng TABLE tìm được: $x=1$.
- Nhân tử có thể sử dụng: $\sqrt{x+3}=2=x+1$.

Bài giải

Điều kiện xác định: $x\ge 1$.

Ta có: $x^3+4x+(x-1)\sqrt{2x+1}<3x^2+\sqrt{x+3}$

$$\Leftrightarrow x^3-3x^2+4x+(x-1)\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+3}<0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^3-3x^2+3x-1\right)+(x-1)\sqrt{2x+1}+\left(x+1-\sqrt{x+3}\right)<0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^3+(x-1)\sqrt{2x+1}+\frac{x^2+x-2}{x+1+\sqrt{x+3}}<0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left((x-1)^2+\sqrt{2x+1}+\frac{x+2}{x+1+\sqrt{x+3}}\right)<0 \Leftrightarrow x<1.$$

Kết hợp điều kiện ta có: $-\frac{1}{2}\le x<1$.

Kết luận: Tập nghiệm của bất phương trình là $S=\left[-\frac{1}{2};1\right)$.

Bài 24: Giải bất phương trình trên tập số thực:

$$\frac{\sqrt{x+24}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+24}-\sqrt{x}}<\frac{8\left(12+x-\sqrt{x^2+24x}\right)}{12+x+\sqrt{x^2+24x}}$$

Phân tích

- Sử dụng TABLE tìm được: $x=3$.

Bài giải

Điều kiện xác định: $x\geq 0$.

Ta có: $\frac{\sqrt{x+24}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+24}-\sqrt{x}}<\frac{8\left(12+x-\sqrt{x^2+24x}\right)}{12+x+\sqrt{x^2+24x}}$

$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x+24}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+24}-\sqrt{x}}<\frac{8\left(x+24-2\sqrt{x}\sqrt{x+24}+x\right)}{x+24+2\sqrt{x}\sqrt{x+24}+x}$

$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x+24}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+24}-\sqrt{x}}<\frac{8\left(\sqrt{x+24}-\sqrt{x}\right)^2}{\left(\sqrt{x+24}+\sqrt{x}\right)^2}$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x+24}+\sqrt{x}\right)^3<8\left(\sqrt{x+24}-\sqrt{x}\right)^3 \Leftrightarrow \sqrt{x+24}+\sqrt{x}<2\left(\sqrt{x+24}-\sqrt{x}\right)$

$\Leftrightarrow 3\sqrt{x}<\sqrt{x+24} \Leftrightarrow 0\leq x<3$

Kết luận: Tập nghiệm của bất phương trình là $S=\left[0;3\right)$.

BÀI TẬP ÁP DỤNG TƯƠNG TỰ

Áp dụng 1: Giải bất phương trình sau trên tập số thực:

$$\frac{\sqrt{x+24}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+24}-\sqrt{x}}<\frac{27\left(x+12-\sqrt{x^2+24x}\right)}{8\left(x+12+\sqrt{x^2+24x}\right)}$$

Áp dụng 2: Giải bất phương trình sau trên tập số thực:

$$\frac{\sqrt{x+8}-\sqrt{x}}{\sqrt{x+8}+\sqrt{x}}>\frac{x+4+\sqrt{x^2+8x}}{8\left(x+4-\sqrt{x^2+8x}\right)}$$

Áp dụng 3: Giải bất phương trình sau trên tập số thực:

$$\left(\frac{\sqrt{x+4}-\sqrt{x}}{\sqrt{x+4}+\sqrt{x}}\right)^3<\frac{x+2+\sqrt{x^2+4x}}{32\left(x+2-\sqrt{x^2+4x}\right)}$$

Bài 25: Giải bất phương trình trên tập số thực:

$$x^3+2x+\frac{x^2+6x+8}{x}>\left(x^2+x+6\right)\sqrt{x+2}$$

Phân tích

- Sử dụng TABLE tìm được: $x=2$.
- Nhân tử có thể sử dụng: $\sqrt{x+2}=2=x$.

Bài giải

Điều kiện xác định: $x\geq -2; x\neq 0$.

Ta có: $x^3+2x+\dfrac{x^2+6x+8}{x}>\left(x^2+x+6\right)\sqrt{x+2}$

$\Leftrightarrow\left(x^3+2x\right)-\left(x^2+2\right)\sqrt{x+2}+\dfrac{(x+2)(x+4)}{x}-(x+4)\sqrt{x+2}>0$

$\Leftrightarrow\left(x^3+2x\right)\left(1-\dfrac{\sqrt{x+2}}{x}\right)+(x+4)\sqrt{x+2}\left(\dfrac{\sqrt{x+2}}{x}-1\right)>0$

$\Leftrightarrow\left(1-\dfrac{\sqrt{x+2}}{x}\right)\left(x^3+2x-(x+4)\sqrt{x+2}\right)>0$

$\Leftrightarrow\left(1-\dfrac{\sqrt{x+2}}{x}\right)\left(x^3-\left(\sqrt{x+2}\right)^3+2x-2\sqrt{x+2}\right)>0$

$\Leftrightarrow\left(1-\dfrac{\sqrt{x+2}}{x}\right)\left(\left(x-\sqrt{x+2}\right)\left(x^2+x\sqrt{x+2}+x+2\right)+2\left(x-\sqrt{x+2}\right)\right)>0$

$\Leftrightarrow\left(1-\dfrac{\sqrt{x+2}}{x}\right)\left(x-\sqrt{x+2}\right)\left(x^2+x\sqrt{x+2}+x+4\right)>0$

$\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{\sqrt{x+2}}{x}\right)\left(x-\sqrt{x+2}\right)\left(2x^2+2x\sqrt{x+2}+2x+8\right)>0$

$\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x-\sqrt{x+2}}{x}\right)\left(x-\sqrt{x+2}\right)\left(x^2+2x\sqrt{x+2}+x+2+x^2+x+6\right)>0$

$\Leftrightarrow\dfrac{\left(x-\sqrt{x+2}\right)^2}{2x}\left(\left(x+\sqrt{x+2}\right)^2+\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{23}{4}\right)>0$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq\sqrt{x+2}\\x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-x-2\neq 0\\x>0\end{cases}\Leftrightarrow x>0, x\neq 2.$

Kết luận: Tập nghiệm của bất phương trình là $S=(0;+\infty)\setminus\{2\}$.

Chú ý: Khi gặp bất phương trình có chứa hằng đẳng thức, ta chú ý:

- Nếu: $A^2\geq 0\Rightarrow x\in D$.
- Nếu: $A^2\leq 0\Rightarrow A=0$.
- Nếu: $A^2>0\Rightarrow A\neq 0$.
- Nếu: $A^2<0\Rightarrow S=\varnothing$.
- Nếu: $A^2+B^2+C^2\geq 0\Rightarrow x\in D$.
- Nếu: $A^2+B^2+C^2\leq 0\Rightarrow A=B=C=0$.
- Nếu: $A^2+B^2+C^2>0\Rightarrow A\neq 0\vee B\neq 0\vee C\neq 0$.
- Nếu: $A^2+B^2+C^2<0\Rightarrow S=\varnothing$.

Bài 26: Giải bất phương trình trên tập số thực:

$$\frac{\sqrt{x-2}+\sqrt{x-1}+\sqrt{x^2-3x+2}+1}{2x-5-\sqrt{x-1}}>\frac{x-3}{6\left(\sqrt{x-2}-1\right)}$$

Phân tích

- Sử dụng TABLE và SOLVE tìm được: $x=\frac{85}{4}$.
- Nhân tử có thể sử dụng: $2\sqrt{x-1}=9$.

Bài giải

Điều kiện xác định: $x\ge 1; x\ne 3; x\ne \frac{13}{4}$.

Ta có: $\frac{\sqrt{x-2}+\sqrt{x-1}+\sqrt{x^2-3x+2}+1}{2x-5-\sqrt{x-1}}>\frac{x-3}{6\left(\sqrt{x-2}-1\right)}$

$\Leftrightarrow \frac{\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{x-2}\sqrt{x-1}\right)+\left(\sqrt{x-1}+1\right)}{2(x-1)-\sqrt{x-1}-3}>\frac{(x-3)\left(\sqrt{x-2}+1\right)}{6(x-3)}$

$\Leftrightarrow \frac{\left(\sqrt{x-2}+1\right)\left(\sqrt{x-1}+1\right)}{\left(2\sqrt{x-1}-3\right)\left(\sqrt{x-1}+1\right)}>\frac{\sqrt{x-2}+1}{6}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{x-1}-3}>\frac{1}{6}\Leftrightarrow \frac{2\sqrt{x-1}-9}{6\left(2\sqrt{x-1}-3\right)}<0\Leftrightarrow \frac{3}{2}<\sqrt{x-1}<\frac{9}{2}\Leftrightarrow \frac{13}{4}<x<\frac{85}{4}$.

Kết luận: Tập nghiệm của bất phương trình là $S=\left(\frac{13}{4};3\right)$.

Bài 27: Giải bất phương trình trên tập số thực:
$\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x-1}\right)\left(1+\sqrt{x^2+2x-3}\right)<4$

Phân tích

- Sử dụng TABLE và SOLVE tìm được: $x=2$.
- Nhân tử có thể sử dụng: $\sqrt{x-1}=1$.

Bài giải

Điều kiện xác định: $x\ge 1$.

Ta có: $\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x-1}\right)\left(1+\sqrt{x^2+2x-3}\right)<4\Leftrightarrow \frac{4\left(1+\sqrt{x^2+2x-3}\right)}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x-1}}<4$

$\Leftrightarrow 1+\sqrt{x^2+2x-3}<\sqrt{x+3}+\sqrt{x-1}\Leftrightarrow \sqrt{x+3}\sqrt{x-1}-\sqrt{x+3}-\left(\sqrt{x-1}-1\right)<0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x+3}\left(\sqrt{x-1}-1\right)-\left(\sqrt{x-1}-1\right)<0\Leftrightarrow \left(\sqrt{x-1}-1\right)\left(\sqrt{x+3}-1\right)<0$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x-1}-1\right)\frac{x+2}{\sqrt{x+3}+1}<0\Leftrightarrow \sqrt{x-1}<1\Leftrightarrow 1\le x<2$

Kết luận: Tập nghiệm của bất phương trình là $S=[1;2)$.

Bài 28: Giải bất phương trình trên tập số thực:
$\left(x^3-3x+1\right)\left(\sqrt{x^2+21}+x\right)>21$

Phân tích

- Sử dụng TABLE tìm được: $x=2$.
- Nhân tử có thể sử dụng: $\sqrt{x^2+21}=5$.

Bài giải

Điều kiện xác định: $D=\mathbb{R}$.

Chú ý rằng: $\sqrt{x^2+21}-x>\sqrt{x^2}-x\ge|x|-x\ge x-x\ge 0$.

Do đó ta có: $\left(x^3-3x+1\right)\left(\sqrt{x^2+21}+x\right)>21\Leftrightarrow\dfrac{21\left(x^3-3x+1\right)}{\sqrt{x^2+21}-x}>21$

$\Leftrightarrow x^3-3x+1>\sqrt{x^2+21}-x\Leftrightarrow x^3-2x+1-\sqrt{x^2+21}>0$

$\Leftrightarrow\left(x^3-2x-4\right)-\left(\sqrt{x^2+21}-5\right)>0\Leftrightarrow(x-2)\left(x^2+2x+2-\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+21}+5}\right)>0$

$\Leftrightarrow(x-2)\left((x+1)^2+\left(1-\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+21}+5}\right)\right)>0$

$\Leftrightarrow(x-2)\left((x+1)^2+\dfrac{\sqrt{x^2+21}+3-x}{\sqrt{x^2+21}+5}\right)>0\Leftrightarrow x>2$.

Kết luận: Tập nghiệm của bất phương trình là $S=(2;+\infty)$.

Bài 29: Giải bất phương trình trên tập số thực:

$\dfrac{(x-6)\sqrt{x-1}-2x+8}{x-3+\sqrt{x-1}}<\dfrac{\sqrt{2x-1}-5}{2}$

Phân tích

- Sử dụng TABLE tìm được: $x=5$.

Bài giải

Điều kiện xác định: $x\ge 1; x\ne 2$.

Do đó ta có: $\dfrac{(x-6)\sqrt{x-1}-2x+8}{x-3+\sqrt{x-1}}<\dfrac{\sqrt{2x-1}-5}{2}$

$\Leftrightarrow\dfrac{(x-1)\sqrt{x-1}-2(x-1)-5\sqrt{x-1}+6}{(x-1)+\sqrt{x-1}-2}<\dfrac{\sqrt{2x-1}-5}{2}$

$\Leftrightarrow\dfrac{\left(\sqrt{x-1}-3\right)\left(\sqrt{x-1}-1\right)\left(\sqrt{x-1}+2\right)}{\left(\sqrt{x-1}-1\right)\left(\sqrt{x-1}+2\right)}<\dfrac{\sqrt{2x-1}-5}{2}$

$\Leftrightarrow 2\left(\sqrt{x-1}-3\right)<\sqrt{2x-1}-5\Leftrightarrow\sqrt{2x-1}+1>2\sqrt{x-1}$

$\Leftrightarrow 2x+2\sqrt{2x-1}>4x-4\Leftrightarrow\sqrt{2x-1}>x-2\Leftrightarrow 1\le x\le 5$.

Kết luận: Tập nghiệm của bất phương trình là $S=[1;5]\setminus\{2\}$.

VII. Phương pháp giải bài toán có từ hai nghiệm hữu tỷ đơn trở lên:

Giả sử trong bài có chứa $\sqrt{3x+1}$ với các nghiệm đó là $x=0, x=1$. Khi đó ta đặt $ax+b=\sqrt{3x+1}$ và giải hệ:

$$\begin{cases}ax+b=\sqrt{3x+1}\Big|_{x=0}\\ ax+b=\sqrt{3x+1}\Big|_{x=1}\end{cases}$$

Tìm ra các giá trị a,b là: $a=b=1$, ta sử dụng liên hợp: $\left(ax+b-\sqrt{3x+1}\right)$ hay $\left(x+1-\sqrt{3x+1}\right)$.

Bài 30: Giải bất phương trình trên tập số thực:
$\sqrt{2x^2-x+3}-\sqrt{21x-17}\geq x-x^2$

Phân tích

- Sử dụng TABLE và SOLVE tìm được: $x=1, x=2$.
- Nhân tử cần tìm: $\left(\sqrt{2x^2-x+3}-x-1\right),\left(3x-1-\sqrt{21x-17}\right)$.

Bài giải:

Điều kiện xác định: $x\geq\dfrac{17}{21}$

Ta có: $\sqrt{2x^2-x+3}-\sqrt{21x-17}\geq x-x^2$

$\Leftrightarrow x^2-x+\sqrt{2x^2-x+3}-\sqrt{21x-17}\geq 0$

$\Leftrightarrow\left(x^2-3x+2\right)+\left(\sqrt{2x^2-x+3}-x-1\right)+\left(3x-1-\sqrt{21x-17}\right)\geq 0$

$$\Leftrightarrow\left(x^2-3x+2\right)+\frac{2x^2-x+3-\left(x+1\right)^2}{\sqrt{2x^2-x+3}+x+1}+\frac{\left(3x-1\right)^2-\left(21x-17\right)}{3x-1+\sqrt{21x-17}}\geq 0$$

$$\Leftrightarrow\left(x^2-3x+2\right)+\frac{x^2-3x+2}{\sqrt{2x^2-x+3}+x+1}+\frac{9\left(x^2-3x+2\right)}{3x-1+\sqrt{21x-17}}\geq 0$$

$$\Leftrightarrow\left(x^2-3x+2\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{2x^2-x+3}+x+1}+\frac{9}{3x-1+\sqrt{21x-17}}\right)\geq 0$$

Vì $x\geq\dfrac{17}{21}$ nên $1+\dfrac{1}{\sqrt{2x^2-x+3}+x+1}+\dfrac{9}{3x-1+\sqrt{21x-17}}>0$

Do đó $\begin{cases}x\geq\dfrac{17}{21}\\x^2-3x+2\geq 0\end{cases}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\dfrac{17}{21}\leq x\leq 1\\x\geq 2\end{array}\right.\Rightarrow x\in\left[\dfrac{17}{21};1\right]\cup\left[2;+\infty\right)$.

Kết luận: Tập nghiệm của bất phương trình là: $S=\left[\dfrac{17}{21};1\right]\cup\left[2;+\infty\right)$.

Bài 31: Giải phương trình trên tập số thực:
$\sqrt{x^4-x^2+4}+\sqrt{x^4+20x^2+4}=7x$

Phân tích

- Sử dụng TABLE và SOLVE tìm được: $x=1, x=2$.
- Nhân tử cần tìm: $\left(\sqrt{x^4-x^2+4}-2x\right),\left(\sqrt{x^4+20x^2+4}-5x\right)$.

Bài giải:

Điều kiện xác định: $x\geq 0$.

Ta có: $\sqrt{x^4-x^2+4}+\sqrt{x^4+20x^2+4}=7x$

$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x^4-x^2+4}-2x\right)+\left(\sqrt{x^4+20x^2+4}-5x\right)=0$

$\Leftrightarrow\frac{x^4-x^2+4-4x^2}{\sqrt{x^4-x^2+4}+2x}+\frac{x^4+20x^2+4-25x^2}{\sqrt{x^4+20x^2+4}+5x}=0$

$\Leftrightarrow\frac{x^4-5x^2+4}{\sqrt{x^4-x^2+4}+2x}+\frac{x^4-5x^2+4}{\sqrt{x^4+20x^2+4}+5x}=0$

$\Leftrightarrow\left(x^4-5x^2+4\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x^4-x^2+4}+2x}+\frac{1}{\sqrt{x^4+20x^2+4}+5x}\right)=0$

Vì $x\geq 0$ ta có: $\frac{1}{\sqrt{x^4-x^2+4}+2x}+\frac{1}{\sqrt{x^4+20x^2+4}+5x}>0.$

Do đó: $\begin{cases}x^4-5x^2+4=0\\ x\geq 0\end{cases}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=2\end{array}\right.$

Kết luận: Tập nghiệm của phương trình là: $S=\{1;2\}$

Bài 32: Giải phương trình trên tập số thực:
$3x^2-x+3=\sqrt{3x+1}+\sqrt{5x+4}$

Phân tích

- Sử dụng TABLE và SOLVE tìm được: $x=1,x=0$.
- Nhân tử cần tìm: $\left(x+1-\sqrt{3x+1}\right),\left(x+2-\sqrt{5x+4}\right)$.

Bài giải:

Điều kiện xác định: $x\geq -\frac{1}{3}$

Ta có: $3x^2-x+3=\sqrt{3x+1}+\sqrt{5x+4}$

$\Leftrightarrow 3x^2-x+3-\sqrt{3x+1}-\sqrt{5x+4}=0$

$\Leftrightarrow 3x^2-3x+\left(x+1-\sqrt{3x+1}\right)+\left(x+2-\sqrt{5x+4}\right)=0$

$\Leftrightarrow 3\left(x^2-x\right)+\frac{(x+1)^2-3x-1}{x+1+\sqrt{3x+1}}+\frac{(x+2)^2-5x-4}{x+2+\sqrt{5x+4}}=0$

$\Leftrightarrow 3\left(x^2-x\right)+\frac{x^2-x}{x+1+\sqrt{3x+1}}+\frac{x^2-x}{x+2+\sqrt{5x+4}}=0$

$\Leftrightarrow\left(x^2-x\right)\left(3+\frac{1}{x+1+\sqrt{3x+1}}+\frac{1}{x+2+\sqrt{5x+4}}\right)=0$

Vì $x\geq -\frac{1}{3}$ nên $3+\frac{1}{x+1+\sqrt{3x+1}}+\frac{1}{x+2+\sqrt{5x+4}}>0$.

Do đó $x^2-x=0\Rightarrow x=0\vee x=1$.

Kết luận: Tập nghiệm của phương trình là: $S=\{0;1\}$

Bài 33: Giải phương trình trên tập số thực:
$\sqrt{3x+1}+2\sqrt[3]{19x+8}=2x^2+x+5$

Phân tích

- Sử dụng TABLE và SOLVE tìm được: $x=1, x=0$.
- Nhân tử cần tìm: $\left(x+1-\sqrt{3x+1}\right),\left(x+2-\sqrt[3]{19x+8}\right)$.

Bài giải:

Điều kiện xác định: $x\ge -\dfrac{1}{3}$

Ta có: $2x^2+x+5=\sqrt{3x+1}+2\sqrt[3]{19x+8}$

$\Leftrightarrow 2x^2+x+5-\sqrt{3x+1}-2\sqrt[3]{19x+8}=0$

$\Leftrightarrow 2x^2-2x+\left(x+1-\sqrt{3x+1}\right)+2\left(x+2-2\sqrt[3]{19x+8}\right)=0$

$$\Leftrightarrow 3\left(x^2-x\right)+\frac{(x+1)^2-3x-1}{x+1+\sqrt{3x+1}}+\frac{2\left((x+2)^3-(19x+8)\right)}{(x+2)^2+(x+2)\sqrt[3]{19x+8}+\left(\sqrt[3]{19x+8}\right)^2}=0$$

$$\Leftrightarrow 3\left(x^2-x\right)+\frac{x^2-x}{x+1+\sqrt{3x+1}}+\frac{2\left(x^2-x\right)(x+7)}{(x+2)^2+(x+2)\sqrt[3]{19x+8}+\left(\sqrt[3]{19x+8}\right)^2}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2-x\right)\left(3+\frac{1}{x+1+\sqrt{3x+1}}+\frac{2(x+7)}{(x+2)^2+(x+2)\sqrt[3]{19x+8}+\left(\sqrt[3]{19x+8}\right)^2}\right)=0$$

Vì $x\ge -\dfrac{1}{3}$ nên $x+1+\sqrt{3x+1}>0; x+2>0; 19x+8>0; x+7>0$.

Do đó $3+\dfrac{1}{x+1+\sqrt{3x+1}}+\dfrac{2(x+7)}{(x+2)^2+(x+2)\sqrt[3]{19x+8}+\left(\sqrt[3]{19x+8}\right)^2}>0$

Vậy $x^2-x=0\Rightarrow x=0\vee x=1$.

Kết luận: Tập nghiệm của phương trình là: $S=\{0;1\}$.

Bài 34: Giải phương trình trên tập số thực:
$\sqrt{28-3x}-24=\sqrt{x}\left(7x-12\sqrt{x}-14\right)$

Phân tích

- Sử dụng TABLE và SOLVE tìm được: $x=1, x=4$.
- Nhân tử cần tìm: $\left(6-\sqrt{x}-\sqrt{28-3x}\right)$.

Bài giải:

Đặt $\sqrt{x}=t\Rightarrow 0\le t\le \dfrac{2\sqrt{21}}{3}$.

Phương trình trở thành: $\sqrt{28-3t^2}-24=t\left(7t^2-12t-14\right)$

$\Leftrightarrow 7t^3-12t^2-14t-\sqrt{28-3t^2}+24=0$

$\Leftrightarrow 7t^3-12t^2-13t+18+\left(6-t-\sqrt{28-3t^2}\right)=0$

$$\Leftrightarrow 7t^3-12t^2-13t+18+\frac{(6-t)^2-28+3t^2}{6-t+\sqrt{28-3t^2}}=0$$

$$\Leftrightarrow (7t+9)(t^2-3t+2)+\frac{4(t^2-3t+2)}{6-t+\sqrt{28-3t^2}}=0$$

$$\Leftrightarrow (t^2-3t+2)\left(7t+9+\frac{4}{6-t+\sqrt{28-3t^2}}\right)=0$$

Vì $0\le t\le\frac{2\sqrt{21}}{3}$ nên $7t+9+\frac{4}{6-t+\sqrt{28-3t^2}}>0.$

Do đó ta có: $t^2-3t+2=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\t=2\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{x}=1\\\sqrt{x}=2\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=4\end{array}\right.$

Kết luận: Tập nghiệm của phương trình là: $S=\{1;4\}$

Bài 35: Giải bất phương trình trên tập số thực:

$31x+34\ge(4x^2-x-2)\left(2\sqrt{8x+9}-\sqrt{x+2}\right)$

Bài giải:

Điều kiện xác định: $x\ge-\frac{9}{8}$. Quan sát biểu thức trên ta thấy nếu nhân liên hợp cho biểu thức $2\sqrt{8x+9}-\sqrt{x+2}$ ta được kết quả $31x+34$. Do đó:

$$31x+34\ge(4x^2-x-2)\left(2\sqrt{8x+9}-\sqrt{x+2}\right)$$

$$\Leftrightarrow 31x+34\ge(4x^2-x-2)\frac{4(8x+9)-(x+2)}{2\sqrt{8x+9}+\sqrt{x+2}}$$

$$\Leftrightarrow 31x+34\ge(4x^2-x-2)\frac{31x+34}{2\sqrt{8x+9}+\sqrt{x+2}}$$

$$\Leftrightarrow (31x+34)\left(2\sqrt{8x+9}+\sqrt{x+2}\right)\ge(4x^2-x-2)(31x+34)$$

$$\Leftrightarrow (31x+34)\left(4x^2-x-2-2\sqrt{8x+9}-\sqrt{x+2}\right)\le 0$$

$$\Leftrightarrow (31x+34)\left(12x^2-3x-6-3\sqrt{x+2}-6\sqrt{8x+9}\right)\le 0$$

$$\Leftrightarrow 12(x^2-x-2)+\left(x+4-3\sqrt{x+2}\right)+2\left(4x+7-3\sqrt{8x+9}\right)\le 0$$

$$\Leftrightarrow (31x+34)\left[12(x^2-x-2)+\frac{(x+4)^2-9(x+2)}{x+4+3\sqrt{x+2}}+\frac{2(4x+7)^2-18(8x+9)}{4x+7+3\sqrt{8x+9}}\right]\le 0$$

$$\Leftrightarrow (31x+34)\left[12(x^2-x-2)+\frac{(x^2-x-2)}{x+4+3\sqrt{x+2}}+\frac{32(x^2-x-2)}{4x+7+3\sqrt{8x+9}}\right]\le 0$$

$$\Leftrightarrow (31x+34)(x^2-x-2)\left(12+\frac{1}{x+4+3\sqrt{x+2}}+\frac{32}{4x+7+3\sqrt{8x+9}}\right)\le 0$$

Vì $x\ge-\frac{9}{8}$ do đó $12+\frac{1}{x+4+3\sqrt{x+2}}+\frac{32}{4x+7+3\sqrt{8x+9}}>0$

Vậy $\begin{cases}(x^2-x-2)(31x+34)\le 0\\ x\ge -\dfrac{9}{8}\end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}-1\le x\le 2\\ -\dfrac{9}{8}\le x\le -\dfrac{34}{31}\end{array}\right.$

Kết luận: Tập nghiệm của bất phương trình là: $S=\left[-\dfrac{9}{8};-\dfrac{34}{31}\right]\cup[-1;2]$

Bài 36: Giải bất phương trình trên tập số thực:

$\left(x\sqrt{2x-1}+5\sqrt{x-1}\right)\left(\sqrt[3]{7x-8}+2\right)=2x^3-x^2-25x+25$

Điều kiện xác định: $x\ge 1$.

Quan sát biểu thức trên ta thấy nếu nhân liên hợp cho biểu thức $x\sqrt{2x-1}+5\sqrt{x-1}$ ta được kết quả $2x^3-x^2-25x+25$. Do đó:

$\left(x\sqrt{2x-1}+5\sqrt{x-1}\right)\left(\sqrt[3]{7x-8}+2\right)=\left(x\sqrt{2x-1}+5\sqrt{x-1}\right)\left(x\sqrt{2x-1}-5\sqrt{x-1}\right)$

Vì $x\sqrt{2x-1}+5\sqrt{x-1}>0\forall x\ge 1$ do đó: $\sqrt[3]{7x-8}+2=x\sqrt{2x-1}-5\sqrt{x-1}$.

$\Leftrightarrow x\sqrt{2x-1}-2-\sqrt[3]{7x-8}-5\sqrt{x-1}=0$

$\Leftrightarrow 2x\sqrt{2x-1}-4-2\sqrt[3]{7x-8}-10\sqrt{x-1}=0$

$\Leftrightarrow 2\left(x-2-\sqrt[3]{7x-8}\right)+5\left(x-1-2\sqrt{x-1}\right)-x\left(x+1-2\sqrt{2x-1}\right)+x^2-6x+5=0$

Tuy nhiên để tránh dấu âm trước khi liên hợp ta sửa lại như sau:

$-x\left(x+1-2\sqrt{2x-1}\right)+x^2-6x+5=2x\sqrt{2x-1}-7x+5$. Do đó:

$2\left(x-2-\sqrt[3]{7x-8}\right)+5\left(x-1-2\sqrt{x-1}\right)-x\left(x+1-2\sqrt{2x-1}\right)+x^2-6x+5=0$

$\Leftrightarrow 2\left(x-2-\sqrt[3]{7x-8}\right)+5\left(x-1-2\sqrt{x-1}\right)+\left(2x\sqrt{2x-1}-7x+5\right)=0$

Ta có: $2\left(x-2-\sqrt[3]{7x-8}\right)=\sqrt{x-1}(x-5)\dfrac{2x\sqrt{x-1}}{(x-2)^2+(x-2)\sqrt[3]{7x-8}+\left(\sqrt[3]{7x-8}\right)^2}$

và $5\left(x-1-2\sqrt{x-1}\right)=\sqrt{x-1}(x-5)\dfrac{5}{\sqrt{x-1}+2}$,

$\left(2x\sqrt{2x-1}-7x+5\right)=\sqrt{x-1}(x-5)\dfrac{(8x-5)\sqrt{x-1}}{x+1+2\sqrt{2x-1}}$.

Chú ý rằng với $x\ge 1$ thì:

$$\frac{2x\sqrt{x-1}}{(x-2)^2+(x-2)\sqrt[3]{7x-8}+\left(\sqrt[3]{7x-8}\right)^2}+\frac{5}{\sqrt{x-1}+2}+\frac{(8x-5)\sqrt{x-1}}{x+1+2\sqrt{2x-1}}>0$$

Do đó ta có: $\sqrt{x-1}(x-5)=0\Leftrightarrow x=1\vee x=5$ (Thỏa mãn điều kiện).

Kết luận: Tập nghiệm của phương trình là: $S=\{1;5\}$

Chủ đề 3:

CÁC PHƯƠNG PHÁP XỬ LÝ BÀI TOÁN CHỨA NGHIỆM ĐƠN VÔ TỶ

I. Giới thiệu phương pháp nhân liên hợp cơ bản và liên hợp ngược:

Ví dụ: Giải phương trình trên tập số thực:

$x^3 - x^2 - x - 5 - (x+4)\sqrt{x+2} = 0$

Phân tích

- Sử dụng TABLE và SOLVE tìm được: $x \approx 3.302775638$.
- Thay vào căn thức tìm nhân tử: $\sqrt{x+2} \approx 2.302775638 \approx x - 1$.

Hướng dẫn cách sử dụng TABLE và SOLVE

Bước 1: Truy cập Mode 7 (Table), xét: $f(x) = x^3 - x^2 - x - 5 - (x+4)\sqrt{x+2}$ Lựa chọn Start = –2, End = 7, Step = 0.5	Math f(X)=X³-X²-X-5-▸
Bước 2: Nhận bảng giá trị: Từ bảng giá trị ta nhận thấy hàm số có sự đổi dấu trong $(3;3.5)$. Như vậy phương trình có thể có nghiệm trong khoảng này. Vì vậy ta sẽ sử dụng SOLVE với giá trị khởi đầu $x = 3.2 \in (3;3.5)$ để tìm ra nghiệm này.	Math X F(X) 7 1 -14.66 8 1.5 -15.66 9 -15 2 Math X F(X) 10 2.5 -11.91 11 3 -5.652 12 4.5359 3.5
Bước 3: Quay trở lại Mode 1, ta gõ phương trình: $x^3 - x^2 - x - 5 - (x+4)\sqrt{x+2} = 0$	Math X³-X²-X-5-(X+4)▸
Bước 4: Bấm Shift Calc (Solve) với giá trị $x = 3.3$, ta thu được nghiệm: $x \approx 3.302775638$	Math X³-X²-X-5-(X+4)▸ X= 3.302775638 L-R= 0
Bước 5: Thay vào căn thức ta có: $\sqrt{x+2} \approx 2.302775638 \approx x - 1$ Vậy phương trình có nhân tử là: $\left(x - 1 - \sqrt{x+2}\right)$	Math ▲ √X+2 2.302775638

Bài giải

Cách 1: Sử dụng liên hợp cơ bản:

Điều kiện xác định: $x \ge -2$.

Ta có: $x^3 - x^2 - x - 5 - (x+4)\sqrt{x+2} = 0$

$\Leftrightarrow x^3 - 2x^2 - 4x - 1 + (x+4)\left(x - 1 - \sqrt{x+2}\right) = 0$

$\Leftrightarrow (x+1)\left(x^2 - 3x - 1\right) + (x+4)\dfrac{x^2 - 3x - 1}{x - 1 + \sqrt{x+2}} = 0$

$\Leftrightarrow \left(x^2 - 3x - 1\right)\left(x + 1 + (x+4)\dfrac{1}{x - 1 + \sqrt{x+2}}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left(x^2 - 3x - 1\right)\left(\dfrac{(x+1)\left(x - 1 + \sqrt{x+2}\right) + x + 4}{x - 1 + \sqrt{x+2}}\right) = 0$

$\Rightarrow \left(x^2 - 3x - 1\right)\left(x^2 + x + 3 + (x+1)\sqrt{x+2}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\left(x^2 - 3x - 1\right)\left(2x^2 + 2x + 6 + 2(x+1)\sqrt{x+2}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\left(x^2 - 3x - 1\right)\left(\left(x + 1 + \sqrt{x+2}\right)^2 + \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{11}{4}\right) = 0$.

$\Leftrightarrow x^2 - 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$.

Thử lại nghiệm ta thấy chỉ có $x = \dfrac{3 + \sqrt{13}}{2}$ thỏa mãn.

Kết luận: Tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{\dfrac{3 + \sqrt{13}}{2}\right\}$.

Cách 2: Sử dụng liên ngược:

Điều kiện xác định: $x \ge -2$.

Ta có: $x^3 - x^2 - x - 5 - (x+4)\sqrt{x+2} = 0$

$\Leftrightarrow x^3 - 2x^2 - 4x - 1 + (x+4)\left(x - 1 - \sqrt{x+2}\right) = 0$

$\Leftrightarrow (x+1)\left(x^2 - 3x - 1\right) + (x+4)\left(x - 1 - \sqrt{x+2}\right) = 0$

Liên hợp ngược: Xét biểu thức liên hợp:

$\left(x - 1 - \sqrt{x+2}\right)\left(x - 1 + \sqrt{x+2}\right) = (x-1)^2 - (x+2) = x^2 - 3x - 1$

Do đó ta có thể viết lại: $x^2 - 3x - 1 = \left(x - 1 - \sqrt{x+2}\right)\left(x - 1 + \sqrt{x+2}\right)$.

Do đó: $(x+1)\left(x - 1 - \sqrt{x+2}\right)\left(x - 1 + \sqrt{x+2}\right) + (x+4)\left(x - 1 - \sqrt{x+2}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left(x - 1 - \sqrt{x+2}\right)\left((x+1)\left(x - 1 + \sqrt{x+2}\right) + x + 4\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left(x - 1 - \sqrt{x+2}\right)\left(x^2 + x + 3 + (x+1)\sqrt{x+2}\right) = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(x-1-\sqrt{x+2}\right)\left(2x^2+2x+6+2(x+1)\sqrt{x+2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(x-1-\sqrt{x+2}\right)\left(\left(x+1+\sqrt{x+2}\right)^2+\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{11}{4}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x-1=\sqrt{x+2} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-1)^2=x+2\\ x\geq 1\end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{3+\sqrt{13}}{2}.$$

Kết luận: Tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right\}$.

ƯU ĐIỂM VÀ NHƯỢC ĐIỂM CỦA LIÊN HỢP CƠ BẢN VÀ LIÊN HỢP NGƯỢC

	Liên hợp cơ bản	**Liên hợp ngược**
Ưu điểm	Có lợi thế khi gặp bài toán từ 2 căn thức trở lên.	Lợi thế khi gặp bài toán bất phương trình.
Nhược điểm	Bất lợi khi giải bất phương trình vì phải xử lý điều kiện mẫu số. Cần thử lại nghiệm sau khi giải xong phương trình.	Bất lợi khi gặp bài toán có nhiều căn thức.

II. Bài tập áp dụng:

Bài 1: Giải phương trình trên tập số thực:
$x^2+4x+3=(x+1)\sqrt{8x+5}+\sqrt{6x+2}$

Phân tích

- Sử dụng TABLE và SOLVE tìm được: $x\approx 4.236067978$.
- Thay vào căn thức tìm nhân tử: $\begin{cases}\sqrt{8x+5}\approx 6.236067978\approx x+2\\ \sqrt{6x+2}\approx 5.236067978\approx x+1\end{cases}$.

Bài giải

Điều kiện xác định: $x\geq -\frac{1}{3}$.

Ta có: $x^2+4x+3=(x+1)\sqrt{8x+5}+\sqrt{6x+2}$

$$\Leftrightarrow (x+1)\left(x+2-\sqrt{8x+5}\right)+\left(x+1-\sqrt{6x+2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)\frac{x^2-4x-1}{x+2+\sqrt{8x+5}}+\frac{x^2-4x-1}{x+1+\sqrt{6x+2}}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2-4x-1\right)\left(\frac{x+1}{x+2+\sqrt{8x+5}}+\frac{1}{x+1+\sqrt{6x+2}}\right)=0.$$

Với $x\geq -\frac{1}{3}$ ta có $\frac{x+1}{x+2+\sqrt{8x+5}}+\frac{1}{x+1+\sqrt{6x+2}}>0$.

Do đó: $x^2-4x-1=0 \Rightarrow x=2\pm\sqrt{5}$.

Kết luận: Tập nghiệm của phương trình $S=\left\{2\pm\sqrt{5}\right\}$.

Bài 2: Giải phương trình trên tập số thực:
$x^2-x-2=\sqrt{3-x}+\sqrt{x}$

Phân tích

- Sử dụng TABLE và SOLVE tìm được: $x\approx 2.618033989$.
- Thay vào căn thức tìm nhân tử: $\begin{cases}\sqrt{3-x}\approx 0.6180339887\approx x-2\\ \sqrt{x}\approx 1.618033989\approx x-1\end{cases}$.

Bài giải

Cách 1: Nhân liên hợp cơ bản:

Điều kiện xác định: $x\in\left[0;3\right]$.

Ta có: $x^2-x-2=\sqrt{3-x}+\sqrt{x}$

$\Leftrightarrow x^2-3x+1+\left(x-2-\sqrt{3-x}\right)+\left(x-1-\sqrt{x}\right)=0$

$$\Leftrightarrow x^2-3x+1+\frac{\left(x-2\right)^2-\left(3-x\right)}{x-2+\sqrt{3-x}}+\frac{\left(x-1\right)^2-x}{x-1+\sqrt{x}}=0$$

$$\Leftrightarrow x^2-3x+1+\frac{x^2-3x+1}{x-2+\sqrt{3-x}}+\frac{x^2-3x+1}{x-1+\sqrt{x}}=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x^2-3x+1\right)\left(1+\frac{1}{x-2+\sqrt{3-x}}+\frac{1}{x-1+\sqrt{x}}\right)=0$$

Điều kiện có nghiệm: $\begin{cases}x^2-x-2\ge 0\\ 0\le x\le 3\end{cases}\Rightarrow 2\le x\le 3$.

Vì $2\le x\le 3$ nên $\begin{cases}x-2+\sqrt{3-x}>0\\ x-1+\sqrt{x}>0\end{cases}\Rightarrow 1+\dfrac{1}{x-2+\sqrt{3-x}}+\dfrac{1}{x-1+\sqrt{x}}>0$.

Do đó $\begin{cases}x^2-3x+1=0\\ 2\le x\le 3\end{cases}\Rightarrow x=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ (Thỏa mãn điều kiện).

Kết luận: Tập nghiệm của phương trình $S=\left\{\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

Chú ý: Vì hai mẫu số chưa dương do đó ta cần khai thác điều kiện có nghiệm của phương trình mới có thể hoàn thành bài toán.

Cách 2: Liên hợp ngược:

(Liên hợp ngược có lợi thế trong bài toán một căn thức. Vì vậy ta có thể hóa giải bài toán bằng cách đặt một căn thức là ẩn phụ).

Điều kiện xác định: $x\in\left[0;3\right]$.

Đặt $t=\sqrt{x}\ge 0$. Ta có: $x^2-x-2=\sqrt{3-x}+\sqrt{x}\Leftrightarrow t^4-t^2-t-2-\sqrt{3-t^2}=0$

$\Leftrightarrow\left(t^4-t^2-2t-1\right)+\left(t-1-\sqrt{3-t^2}\right)=0$

$\Leftrightarrow (t^2-t-1)(t^2+t+1)+\left(t-1-\sqrt{3-t^2}\right)=0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(2t^2-2t-2)(t^2+t+1)+\left(t-1-\sqrt{3-t^2}\right)=0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(t-1-\sqrt{3-t^2}\right)\left(t-1+\sqrt{3-t^2}\right)(t^2+t+1)+\left(t-1-\sqrt{3-t^2}\right)=0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(t-1-\sqrt{3-t^2}\right)\left(\left(t-1+\sqrt{3-t^2}\right)(t^2+t+1)+2\right)=0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(t-1-\sqrt{3-t^2}\right)\left(t^3-1+(t^2+t+1)\sqrt{3-t^2}+2\right)=0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(t-1-\sqrt{3-t^2}\right)\left(t^3+1+(t^2+t+1)\sqrt{3-t^2}\right)=0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\sqrt{x}-1-\sqrt{3-x}\right)\left(x\sqrt{x}+1+\left(x+\sqrt{x}+1\right)\sqrt{3-x}\right)=0$

Vì $x\sqrt{x}+1+\left(x+\sqrt{x}+1\right)\sqrt{3-x}>0, \forall 0\le x\le 3$ do đó $\sqrt{x}-1-\sqrt{3-x}=0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x}=1+\sqrt{3-x} \Leftrightarrow x=4-x+2\sqrt{3-x} \Leftrightarrow x-2=\sqrt{3-x}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 2 \\ (x-2)^2=3-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 2 \\ x^2-3x+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$

Kết luận: Tập nghiệm của phương trình $S=\left\{\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

Chú ý: Việc sử dụng kỹ thuật đặt ẩn phụ kết hợp với liên hợp ngược có thể đưa bài toán được phân tích nhân tử về dạng tích:

$x^2-x-2-\sqrt{3-x}-\sqrt{x}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{x}-1-\sqrt{3-x}\right)\left(x\sqrt{x}+1+\left(x+\sqrt{x}+1\right)\sqrt{3-x}\right)$

Ta gọi đó là kỹ thuật Ép tích bằng ẩn phụ.

Bài 3: Giải phương trình trên tập số thực:
$x^2-3x-2=(x-1)\sqrt{2x+1}$

Phân tích

- Sử dụng TABLE và SOLVE tìm được: $x\approx -0.414213562$.
- Thay vào căn thức tìm nhân tử: $\sqrt{2x+1}\approx 0.4142135624\approx -x$.

Bài giải

Điều kiện xác định: $x\ge -\frac{1}{2}$.

Ta có: $x^2-3x-2=(x-1)\sqrt{2x+1} \Leftrightarrow 2x^2-4x-2=(x-1)\left(x+\sqrt{2x+1}\right)$

$\Leftrightarrow 2\left(x^2-(2x+1)\right)=(x-1)\left(x+\sqrt{2x+1}\right)$

$\Leftrightarrow 2\left(x-\sqrt{2x+1}\right)\left(x+\sqrt{2x+1}\right)=(x-1)\left(x+\sqrt{2x+1}\right)$

Trường hợp 1: $x+\sqrt{2x+1}=0 \Leftrightarrow \sqrt{2x+1}=-x \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1=x^2 \\ x\le 0 \end{cases} \Rightarrow x=1-\sqrt{2}$

Trường hợp 2: $2\left(x-\sqrt{2x+1}\right)=x-1 \Leftrightarrow x+1=2\sqrt{2x+1}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(x+1)^2=4(2x+1)\\ x\ge -1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2-6x-3=0\\ x\ge -1\end{cases} \Rightarrow x=3\pm 2\sqrt{3}$$

Kết luận: Tập nghiệm của phương trình $S=\left\{1-\sqrt{2};3\pm 2\sqrt{3}\right\}$.

Bài 4: Giải phương trình trên tập số thực:

$x^2+x-1=(x+2)\sqrt{x^2-2x+2}$

Phân tích

- Sử dụng TABLE và SOLVE tìm được: $x\approx 3.828427125$.
- Thay vào căn thức tìm nhân tử: $\sqrt{x^2-2x+2}=3$.

Bài giải

Điều kiện xác định: $x\in\mathbb{R}$.

Ta có: $x^2+x-1=(x+2)\sqrt{x^2-2x+2} \Leftrightarrow x^2-2x-7=(x+2)\left(\sqrt{x^2-2x+2}-3\right)$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2-2x+2}-3\right)\left(\sqrt{x^2-2x+2}+3\right)=(x+2)\left(\sqrt{x^2-2x+2}-3\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2-2x+2}-3\right)\left(\sqrt{x^2-2x+2}+1-x\right)=0$$

Trường hợp 1: $\sqrt{x^2-2x+2}=3 \Leftrightarrow x^2-2x+2=9 \Leftrightarrow x^2-2x-7=0 \Leftrightarrow x=1\pm 2\sqrt{2}$

Trường hợp 2: $\sqrt{x^2-2x+2}=x-1 \Leftrightarrow \begin{cases}x\ge 1\\ x^2-2x+2=x^2-2x+1\end{cases}$ (Vô nghiệm).

Kết luận: Tập nghiệm của phương trình $S=\left\{1-\sqrt{2};3\pm 2\sqrt{3}\right\}$.

Bài 5: Giải bất phương trình trên tập số thực:

$x^3+3x^2+x+2\ge 2x^2\sqrt{x+4}+\sqrt{2x+11}$

Phân tích

- Sử dụng TABLE và SOLVE tìm được: $x\approx 1.828427124$.
- Thay vào căn thức tìm nhân tử: $\begin{cases}2\sqrt{x+4}\approx 4.828427125\approx x+3\\ \sqrt{2x+11}\approx 3.828427125\approx x+2\end{cases}$

Bài giải

Điều kiện xác định: $x\ge -4$.

Ta có: $x^3+3x^2+x+2\ge 2x^2\sqrt{x+4}+\sqrt{2x+11}$

$$\Leftrightarrow x^3+3x^2+x+2-2x^2\sqrt{x+4}-\sqrt{2x+11}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow x^2\left(x+3-2\sqrt{x+4}\right)+\left(x+2-\sqrt{2x+11}\right)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow x^2\frac{(x+3)^2-4(x+4)}{x+3+2\sqrt{x+4}}+\frac{(x+2)^2-(2x+11)}{x+2+\sqrt{2x+11}}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow x^2\frac{x^2+2x-7}{x+3+2\sqrt{x+4}}+\frac{x^2+2x-7}{x+2+\sqrt{2x+11}}\geq 0$$

$$\Leftrightarrow\left(x^2+2x-7\right)\left(\frac{x^2}{x+3+2\sqrt{x+4}}+\frac{1}{x+2+\sqrt{2x+11}}\right)\geq 0.$$

Điều kiện có nghiệm: $\begin{cases}x\geq -4\\x^3+3x^2+x+2\geq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\geq -4\\x^3+3x^2+x+3>0\end{cases}\Rightarrow x>-3.$

Vì $x>-3\Rightarrow\begin{cases}x+3+2\sqrt{x+4}\geq 2>0\\x+2+\sqrt{2x+11}\geq -1+\sqrt{5}>0\end{cases}$

$$\Rightarrow\frac{x^2}{x+3+2\sqrt{x+4}}+\frac{1}{x+2+\sqrt{2x+11}}>0$$

Do đó $\begin{cases}x^2+2x-7\geq 0\\x>-3\end{cases}\Rightarrow x\geq -1+2\sqrt{2}.$

Kết luận: Tập nghiệm của bất phương trình $S=\left[-1+2\sqrt{2};+\infty\right).$

Bài 6: Giải phương trình trên tập số thực:

$x^3+x^2=\left(x^2+1\right)\sqrt{x+1}+1$

Phân tích

- Sử dụng TABLE và SOLVE tìm được: $x\approx 1.618033989$.
- Thay vào căn thức tìm nhân tử: $\sqrt{x+1}\approx 1.618033989\approx x$.

Bài giải

Cách 1: Nhân liên hợp cơ bản:

Điều kiện xác định: $x\geq -1$.

Ta có: $x^3+x^2=\left(x^2+1\right)\sqrt{x+1}+1\Leftrightarrow x^3+x^2-1-\left(x^2+1\right)\sqrt{x+1}=0$

$$\Leftrightarrow x^2-x-1+\left(x^2+1\right)\left(x-\sqrt{x+1}\right)=0\Leftrightarrow x^2-x-1+\left(x^2+1\right)\frac{x^2-(x+1)}{x+\sqrt{x+1}}=0$$

$$\Leftrightarrow x^2-x-1+\left(x^2+1\right)\frac{x^2-x-1}{x+\sqrt{x+1}}=0\Leftrightarrow\left(x^2-x-1\right)\left(1+\frac{x^2+1}{x+\sqrt{x+1}}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x^2-x-1\right)\left(\frac{x^2+1+x+\sqrt{x+1}}{x+\sqrt{x+1}}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x^2-x-1\right)\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}+\sqrt{x+1}\right)=0\Leftrightarrow x^2-x-1=0\Leftrightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

Thử lại nghiệm ta thấy chỉ có $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ thỏa mãn.

Kết luận: Tập nghiệm của phương trình $S=\left\{\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}.$

Cách 2: **Liên hợp ngược:**

Ta có: $x^3+x^2=\left(x^2+1\right)\sqrt{x+1}+1 \Leftrightarrow x^3+x^2-1-\left(x^2+1\right)\sqrt{x+1}=0$

$\Leftrightarrow x^2-x-1+\left(x^2+1\right)\left(x-\sqrt{x+1}\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(x+\sqrt{x+1}\right)\left(x-\sqrt{x+1}\right)+\left(x^2+1\right)\left(x-\sqrt{x+1}\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(x-\sqrt{x+1}\right)\left(x^2+x+1+\sqrt{x+1}\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(x-\sqrt{x+1}\right)\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}+\sqrt{x+1}\right)=0$

$\Leftrightarrow x=\sqrt{x+1} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=x+1 \\ x\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (Thỏa mãn điều kiện).

Kết luận: Tập nghiệm của phương trình $S=\left\{\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

Bài 7: Giải bất phương trình trên tập số thực:

$x^2+\sqrt{x-\sqrt{2x+2}} \ge 3x+1+\sqrt{2(3x+1)}$

Phân tích

- Sử dụng TABLE và SOLVE tìm được: $x\approx 4.236067977$.
- Thay vào căn thức tìm nhân tử: $\begin{cases} \sqrt{x-\sqrt{2x+2}}=1 \\ \sqrt{2(3x+1)}\approx 5.236067977\approx x+1 \end{cases}$.

Bài giải

Điều kiện xác định: $x\ge -\frac{1}{3}$.

Ta có: $x^2+\sqrt{x-\sqrt{2x+2}} \ge 3x+1+\sqrt{2(3x+1)}$

$\Leftrightarrow x^2-3x-1+\sqrt{x-\sqrt{2x+2}}-\sqrt{2(3x+1)}\ge 0$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x-\sqrt{2x+2}}-1\right)+\left(x+1-\sqrt{2(3x+1)}\right)+x^2-4x-1\ge 0$

$\Leftrightarrow \frac{x-\sqrt{2x+2}-1}{\sqrt{x-\sqrt{2x+2}}+1}+\frac{x^2+2x+1-2(3x+1)}{x+1+\sqrt{2(3x+1)}}+x^2-4x-1\ge 0$

$\Leftrightarrow \frac{(x-1)-\sqrt{2x+2}}{\sqrt{x-\sqrt{2x+2}}+1}+\frac{x^2-4x-1}{x+1+\sqrt{2(3x+1)}}+\left(x^2-4x-1\right)\ge 0$

$\Leftrightarrow \frac{x^2-2x+1-(2x+2)}{\left(\sqrt{x-\sqrt{2x+2}}+1\right)\left(x-1+\sqrt{2x+2}\right)}+\frac{x^2-4x-1}{x+1+\sqrt{2(3x+1)}}+\left(x^2-4x-1\right)\ge 0$

$\Leftrightarrow \left(x^2-4x-1\right)\left(\frac{1}{\left(\sqrt{x-\sqrt{2x+2}}+1\right)\left(x-1+\sqrt{2x+2}\right)}+\frac{1}{x+1+\sqrt{2(3x+1)}}+1\right)\ge 0$

Điều kiện có nghiệm: $\begin{cases} x \ge -\dfrac{1}{3} \\ x \ge \sqrt{2x+2} \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x^2 \ge 2x+2 \end{cases} \Rightarrow x \ge 1+\sqrt{3}$

Với $x \ge 1+\sqrt{3}$ ta có: $\begin{cases} \left(\sqrt{x-\sqrt{2x+2}}+1\right)\left(x-1+\sqrt{2x+2}\right) > 0 \\ x+1+\sqrt{2(3x+1)} > 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{1}{\left(\sqrt{x-\sqrt{2x+2}}+1\right)\left(x-1+\sqrt{2x+2}\right)} + \frac{1}{x+1+\sqrt{2(3x+1)}} + 1 > 0$$

Do đó: $\begin{cases} x^2-4x-1 \ge 0 \\ x \ge 1+\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow x \ge 2+\sqrt{5}$.

Kết luận: Tập nghiệm của bất phương trình $S = \left[2+\sqrt{5};+\infty\right)$.

Bài 8: Giải phương trình trên tập số thực:

$2x+\sqrt{4x^2-5x+2} = \sqrt{8x-1}+\sqrt{3x+1}$

Phân tích

- Sử dụng TABLE và SOLVE tìm được: $x \approx 1.866025404$.
- Thay vào căn thức tìm nhân tử:

$\begin{cases} \sqrt{4x^2-5x+2} \approx \sqrt{3x+1} \approx 2.568672072 \\ \sqrt{8x-1} \approx 3.732050808 \approx 2x \end{cases}$

Bài giải

Điều kiện xác định: $x \ge \dfrac{1}{8}$.

Ta có: $2x+\sqrt{4x^2-5x+2} = \sqrt{8x-1}+\sqrt{3x+1}$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{4x^2-5x+2}-\sqrt{3x+1}\right)+\left(2x-\sqrt{8x-1}\right) = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(4x^2-5x+2\right)-\left(3x+1\right)}{\sqrt{4x^2-5x+2}+\sqrt{3x+1}} + \frac{4x^2-\left(8x-1\right)}{2x+\sqrt{8x-1}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{4x^2-8x+1}{\sqrt{4x^2-5x+2}+\sqrt{3x+1}} + \frac{4x^2-8x+1}{2x+\sqrt{8x-1}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(4x^2-8x+1\right)\left(\frac{1}{\sqrt{4x^2-5x+2}+\sqrt{3x+1}} + \frac{1}{2x+\sqrt{8x-1}}\right) = 0.$$

Vì $x \ge \dfrac{1}{8}$ do đó $\begin{cases} \sqrt{4x^2-5x+2}+\sqrt{3x+1} > 0 \\ 2x+\sqrt{8x-1} \ge \dfrac{1}{4} > 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{4x^2-5x+2}+\sqrt{3x+1}} + \frac{1}{2x+\sqrt{8x-1}} > 0$$

Như vậy $\begin{cases} 4x^2-8x+1 = 0 \\ x \ge \dfrac{1}{8} \end{cases} \Rightarrow x = \dfrac{2 \pm \sqrt{3}}{2}$.

Kết luận: Tập nghiệm của phương trình $S=\left\{\frac{2\pm\sqrt{3}}{2}\right\}$.

Bài 9: Giải phương trình trên tập số thực:

$$\frac{6x-5\sqrt{1+x}}{2+3\sqrt{1+x}}+\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}=0$$

Phân tích

- Sử dụng TABLE và SOLVE tìm được: $x\approx 0.866025403$.
- Thay vào căn thức tìm nhân tử: $\begin{cases}\sqrt{1+x}\approx 1.366025404\approx x+\frac{1}{2}\\ \sqrt{1-x}\approx 0.3660254038\approx x-\frac{1}{2}\end{cases}$.

Bài giải

Điều kiện xác định: $-1<x\le 1$.

Ta có: $\frac{6x-5\sqrt{1+x}}{2+3\sqrt{1+x}}+\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}=0\Leftrightarrow\frac{6(x+1)-5\sqrt{1+x}-6}{2+3\sqrt{1+x}}+\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}=0$

$$\Leftrightarrow\frac{\left(3\sqrt{1+x}+2\right)\left(2\sqrt{1+x}-3\right)}{2+3\sqrt{1+x}}+\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}=0\Leftrightarrow 3\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}=2x+2$$

$$\Leftrightarrow 6\sqrt{1+x}-2\sqrt{1-x}=4x+4$$

$$\Leftrightarrow 4x+4-6\sqrt{1+x}+2\sqrt{1-x}=0\Leftrightarrow 3\left(2x+1-2\sqrt{1+x}\right)-\left(2x-1-2\sqrt{1-x}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 3\frac{(2x+1)^2-4(1+x)}{2x+1+2\sqrt{1+x}}-\frac{(2x-1)^2-4(1-x)}{2x-1+2\sqrt{1-x}}=0$$

$$\Leftrightarrow 3\frac{4x^2-3}{2x+1+2\sqrt{1+x}}-\frac{4x^2-3}{2x-1+2\sqrt{1-x}}=0$$

$$\Leftrightarrow\left(4x^2-3\right)\left(\frac{3}{2x+1+2\sqrt{1+x}}-\frac{1}{2x-1+2\sqrt{1-x}}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(4x^2-3\right)\frac{4x-4+6\sqrt{1-x}-2\sqrt{1+x}}{\left(2x+1+2\sqrt{1+x}\right)\left(2x-1+2\sqrt{1-x}\right)}=0$$

$$\Rightarrow\left(4x^2-3\right)\left(4x-4+6\sqrt{1-x}-2\sqrt{1+x}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(4x^2-3\right)\left(2x-2+3\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}\right)=0$$

Trường hợp 1: $4x^2-3=0\Leftrightarrow x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ (Thỏa mãn điều kiện).

Trường hợp 2: $2x-2+3\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}=0$. Khi đó kết hợp với phương trình ban đầu ta được: $\begin{cases}2x-2+3\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}=0\\ 3\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}=2x+2\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}2x-2+3\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}=0\\ 9\sqrt{1+x}-3\sqrt{1-x}=6x+6\end{cases}$. Cộng hai vế của hai phương trình ta được:

$\left(2x-2+3\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}\right)+\left(9\sqrt{1+x}-3\sqrt{1-x}\right)=6x+6$

$\Leftrightarrow 8\sqrt{1+x}=4x+8 \Leftrightarrow 2\sqrt{1+x}=x+2$

$\Leftrightarrow \begin{cases}-1<x\le 1\\ (x+2)^2=4(x+1)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-1<x\le 1\\ x^2=0\end{cases} \Rightarrow x=0$ (Thỏa mãn điều kiện).

Kết luận: Tập nghiệm của phương trình $S=\left\{\pm\frac{\sqrt{3}}{2};0\right\}$.

Bài 10: Giải phương trình trên tập số thực:

$\sqrt{5x^2-5x+3}-\sqrt{7x-2}+4x^2-6x+1=0$

Phân tích

- Sử dụng TABLE và SOLVE tìm được: $x\approx 1.390388203$.
- Thay vào căn thức tìm nhân tử:

$\begin{cases}\sqrt{5x^2-5x+3}\approx 2.390388203\approx x+1\\ \sqrt{7x-2}\approx 2.780776406\approx 2x\end{cases}$

Bài giải

Điều kiện xác định: $x\ge\frac{2}{7}$.

Ta có: $\sqrt{5x^2-5x+3}-\sqrt{7x-2}+4x^2-6x+1=0$

$\Leftrightarrow\left(\sqrt{5x^2-5x+3}-(x+1)\right)+\left(2x-\sqrt{7x-2}\right)+4x^2-7x+2=0$

$\Leftrightarrow\left(4x^2-7x+2\right)\left(\frac{1}{\sqrt{5x^2-5x+3}+x+1}+\frac{1}{2x+\sqrt{7x-2}}+1\right)=0$ (*)

Với $x\ge\frac{2}{7}$ ta có: $\frac{1}{\sqrt{5x^2-5x+3}+x+1}+\frac{1}{2x+\sqrt{7x-2}}+1>0$.

Do đó $\begin{cases}4x^2-7x+2=0\\ x\ge\frac{2}{7}\end{cases}\Rightarrow x=\frac{7\pm\sqrt{17}}{8}$.

Kết luận: Tập nghiệm của phương trình $S=\left\{\frac{7\pm\sqrt{17}}{8}\right\}$.

Bài 11: Giải phương trình trên tập số thực:

$15x^2=x+2\sqrt{x^2+x+1}+5$

Phân tích

- Sử dụng TABLE và SOLVE tìm được: $x\approx 0.767591879$.
- Thay vào căn thức tìm nhân tử: $\sqrt{x^2+x+1}\approx 1.535183758\approx 2x$.

Bài giải

Cách 1: Nhân liên hợp cơ bản:

Điều kiện xác định: $x\in\mathbb{R}$.

Ta có: $15x^2=x+2\sqrt{x^2+x+1}+5\Leftrightarrow 15x^2-x-5-2\sqrt{x^2+x+1}=0$

$\Leftrightarrow 2\left(2x-\sqrt{x^2+x+1}\right)+15x^2-5x-5=0$

$\Leftrightarrow \dfrac{2\left(3x^2-x-1\right)}{2x+\sqrt{x^2+x+1}}+5\left(3x^2-x-1\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(3x^2-x-1\right)\left(\dfrac{2}{2x+\sqrt{x^2+x+1}}+5\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(3x^2-x-1\right)\left(10x+2+5\sqrt{x^2+x+1}\right)=0$

Trường hợp 1: $3x^2-x-1=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1\pm\sqrt{13}}{6}$.

Thử lại nghiệm ta thấy chỉ có nghiệm $x=\dfrac{1+\sqrt{13}}{6}$ thỏa mãn.

Trường hợp 2: $10x+2+5\sqrt{x^2+x+1}=0 \Leftrightarrow 5\sqrt{x^2+x+1}=-10x-2$

$\Leftrightarrow \begin{cases}25\left(x^2+x+1\right)=\left(10x+2\right)^2\\10x+2\le 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}75x^2+15x-21=0\\10x+2\le 0\end{cases} \Leftrightarrow x=\dfrac{-1-\sqrt{29}}{10}$

Thử lại nghiệm ta thấy $x=\dfrac{-1-\sqrt{29}}{10}$ thỏa mãn.

Kết luận: Tập nghiệm của phương trình $S=\left\{\dfrac{-1-\sqrt{29}}{10};\dfrac{1+\sqrt{13}}{6}\right\}$.

Cách 2: Liên hợp ngược:

Điều kiện xác định: $x\in\mathbb{R}$.

Ta có: $15x^2=x+2\sqrt{x^2+x+1}+5 \Leftrightarrow 15x^2-x-5-2\sqrt{x^2+x+1}=0$

$\Leftrightarrow 2\left(2x-\sqrt{x^2+x+1}\right)+15x^2-5x-5=0$

$\Leftrightarrow 2\left(2x-\sqrt{x^2+x+1}\right)+5\left(3x^2-x-1\right)=0$

$\Leftrightarrow 2\left(2x-\sqrt{x^2+x+1}\right)+5\left(2x-\sqrt{x^2+x+1}\right)\left(2x+\sqrt{x^2+x+1}\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(2x-\sqrt{x^2+x+1}\right)\left(10x+2+5\sqrt{x^2+x+1}\right)=0$

Trường hợp 1: $2x=\sqrt{x^2+x+1} \Leftrightarrow \begin{cases}4x^2=x^2+x+1\\x\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow x=\dfrac{1+\sqrt{13}}{6}$.

Trường hợp 2: $10x+2+5\sqrt{x^2+x+1}=0 \Leftrightarrow 5\sqrt{x^2+x+1}=-10x-2$

$\Leftrightarrow \begin{cases}25\left(x^2+x+1\right)=\left(10x+2\right)^2\\10x+2\le 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}75x^2+15x-21=0\\10x+2\le 0\end{cases} \Leftrightarrow x=\dfrac{-1-\sqrt{29}}{10}$.

Kết luận: Tập nghiệm của phương trình $S=\left\{\dfrac{-1-\sqrt{29}}{10};\dfrac{1+\sqrt{13}}{6}\right\}$.

Bài 12: Giải phương trình trên tập số thực:

$3x^2 = \sqrt[3]{x^3+4x+2}$

Phân tích

- Sử dụng TABLE và SOLVE tìm được: $x \approx 0.767591879$.
- Thay vào căn thức tìm nhân tử: $\sqrt[3]{x^3+4x+2} \approx 1.767591879 \approx x+1$.

Bài giải

Cách 1: Nhân liên hợp cơ bản:

Điều kiện xác định: $x \in \mathbb{R}$.

Ta có: $3x^2 = \sqrt[3]{x^3+4x+2} \Leftrightarrow 3x^2 - \sqrt[3]{x^3+4x+2} = 0$

$\Leftrightarrow 3x^2 - x - 1 + \left(x+1-\sqrt[3]{x^3+4x+2}\right) = 0$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - x - 1 + \frac{(x+1)^3 - \left(x^3+4x+2\right)}{(x+1)^2 + (x+1)\sqrt[3]{x^3+4x+2} + \left(\sqrt[3]{x^3+4x+2}\right)^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(3x^2-x-1\right)\left(1 + \frac{1}{(x+1)^2 + (x+1)\sqrt[3]{x^3+4x+2} + \left(\sqrt[3]{x^3+4x+2}\right)^2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(3x^2-x-1\right)\left(1 + \frac{2}{(x+1)^2 + \left(x+1+\sqrt[3]{x^3+4x+2}\right)^2 + \left(\sqrt[3]{x^3+4x+2}\right)^2}\right) = 0$$

$\Leftrightarrow 3x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1 \pm \sqrt{13}}{6}$ (Thử lại nghiệm thỏa mãn).

Kết luận: Tập nghiệm của phương trình $S = \left\{\dfrac{1\pm\sqrt{13}}{6}\right\}$.

Cách 2: Liên hợp ngược:

Điều kiện xác định: $x \in \mathbb{R}$.

Ta có: $3x^2 = \sqrt[3]{x^3+4x+2} \Leftrightarrow 3x^2 - \sqrt[3]{x^3+4x+2} = 0$

$\Leftrightarrow 3x^2 - x - 1 + \left(x+1-\sqrt[3]{x^3+4x+2}\right) = 0$

$$\Leftrightarrow \left(x+1-\sqrt[3]{x^3+4x+2}\right)\left(\left(\sqrt[3]{x^3+4x+2} + \frac{x+1}{2}\right)^2 + \frac{3(x+1)^2}{4}\right) + \left(x+1-\sqrt[3]{x^3+4x+2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x+1-\sqrt[3]{x^3+4x+2}\right)\left(\left(\sqrt[3]{x^3+4x+2} + \frac{x+1}{2}\right)^2 + \frac{3(x+1)^2}{4} + 1\right) = 0$$

Vì $\left(\sqrt[3]{x^3+4x+2} + \dfrac{x+1}{2}\right)^2 + \dfrac{3(x+1)^2}{4} + 1 > 0 \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow x+1 = \sqrt[3]{x^3+4x+2}$

$\Leftrightarrow 3x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{6}$ (Thử lại nghiệm thỏa mãn).

Kết luận: Tập nghiệm của phương trình $S = \left\{\frac{1 \pm \sqrt{13}}{6}\right\}$.

Bài 13: Giải phương trình trên tập số thực:
$x^2 + 2x + 4 + (2x+1)\sqrt{x+4} = 0$

Phân tích

- Sử dụng TABLE và SOLVE tìm được: $x \approx -1.561552813$.
- Thay vào căn thức tìm nhân tử: $\sqrt{x+4} \approx 1.561552813 \approx -x$.

Bài giải

Điều kiện xác định: $x \geq -4$.

$x^2 + 2x + 4 + (2x+1)\sqrt{x+4} = 0 \Leftrightarrow -x^2 + x + 4 + (2x+1)\left(x + \sqrt{x+4}\right) = 0$

$\Leftrightarrow -\left(x^2 - x - 4\right) + (2x+1)\left(x + \sqrt{x+4}\right) = 0$

$\Leftrightarrow -\left(x + \sqrt{x+4}\right)\left(x - \sqrt{x+4}\right) + (2x+1)\left(x + \sqrt{x+4}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left(x + \sqrt{x+4}\right)\left(-x + \sqrt{x+4} + 2x + 1\right) = 0 \Leftrightarrow \left(x + \sqrt{x+4}\right)\left(x + 1 + \sqrt{x+4}\right) = 0$

Với $x + \sqrt{x+4} = 0 \Leftrightarrow -x = \sqrt{x+4} \Rightarrow \begin{cases} -4 \leq x \leq 0 \\ x^2 - x - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{1 - \sqrt{17}}{2}$

Với $x + 1 + \sqrt{x+4} = 0 \Leftrightarrow -x - 1 = \sqrt{x+4} \Rightarrow \begin{cases} -4 \leq x \leq -1 \\ x^2 + x - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{-1 - \sqrt{13}}{2}$.

Kết luận: Tập nghiệm của phương trình $S = \left\{\frac{1 - \sqrt{17}}{2}; \frac{-1 - \sqrt{13}}{2}\right\}$.

Bài 14: Giải phương trình trên tập số thực:
$2x^2 + x + 1 + 3x\sqrt{x+1} = 0$

Phân tích

- Sử dụng TABLE và SOLVE tìm được: $x \approx -0.390388203$.
- Thay vào căn thức tìm nhân tử: $\sqrt{x+1} \approx 0{,}7807764064 \approx -2x$.

Bài giải

Điều kiện xác định: $x \geq -1$.

Ta có: $2x^2 + x + 1 + 3x\sqrt{x+1} = 0 \Leftrightarrow -4x^2 + x + 1 + 3x\left(2x + \sqrt{x+1}\right) = 0$

$\Leftrightarrow 3x\left(2x + \sqrt{x+1}\right) - \left(4x^2 - (x+1)\right) = 0$

$\Leftrightarrow 3x\left(2x + \sqrt{x+1}\right) - \left(2x + \sqrt{x+1}\right)\left(2x - \sqrt{x+1}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left(2x + \sqrt{x+1}\right)\left(3x - 2x + \sqrt{x+1}\right) = 0 \Leftrightarrow \left(2x + \sqrt{x+1}\right)\left(x + \sqrt{x+1}\right) = 0$

Trường hợp 1: $-2x = \sqrt{x+1} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 = x + 1 \\ -1 \leq x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1 - \sqrt{17}}{8}$.

Trường hợp 2: $-x=\sqrt{x+1}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2=x+1\\-1\le x\le 0\end{cases}\Rightarrow x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Kết luận: Tập nghiệm của phương trình $S=\left\{\dfrac{1-\sqrt{5}}{2},\dfrac{1-\sqrt{17}}{8}\right\}$.

Bài 15: Giải phương trình trên tập số thực:
$2x^2+5x+\left(x^2+2\right)\sqrt{x+2}=0$

Phân tích

- Sử dụng TABLE và SOLVE tìm được: $x\approx -1.464101615$.
- Thay vào căn thức tìm nhân tử: $2\sqrt{x+2}\approx 1.464101615\approx -x$.

Bài giải

Điều kiện xác định: $x\ge -2$.

Ta có: $2x^2+5x+\left(x^2+2\right)\sqrt{x+2}=0\Leftrightarrow 4x^2+10x+2\left(x^2+2\right)\sqrt{x+2}=0$

$\Leftrightarrow -x^3+4x^2+8x+\left(x^2+2\right)\left(x+2\sqrt{x+2}\right)=0$

$\Leftrightarrow -x\left(x^2-4(x+2)\right)+\left(x^2+2\right)\left(x+2\sqrt{x+2}\right)=0$

$\Leftrightarrow -x\left(x-2\sqrt{x+2}\right)\left(x+2\sqrt{x+2}\right)+\left(x^2+2\right)\left(x+2\sqrt{x+2}\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(x+2\sqrt{x+2}\right)\left(x^2+2-x\left(x-2\sqrt{x+2}\right)\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(x+2\sqrt{x+2}\right)\left(2+2x\sqrt{x+2}\right)=0\Leftrightarrow \left(x+2\sqrt{x+2}\right)\left(1+x\sqrt{x+2}\right)=0$

Trường hợp 1: $-x=2\sqrt{x+2}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2=4(x+2)\\-2\le x\le 0\end{cases}\Leftrightarrow x=2-2\sqrt{3}$

Trường hợp 2: $1=-x\sqrt{x+2}\Leftrightarrow\begin{cases}1=x^2(x+2)\\-2\le x\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\end{array}\right.$

Kết luận: Tập nghiệm của phương trình $S=\left\{-1;\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2};2-2\sqrt{3}\right\}$.

Bài 16: Giải bất phương trình trên tập số thực:
$\dfrac{x^3+x+1+x\left(\sqrt{x+1}\right)^3}{x+\sqrt{x^2+x+1}}\le 0$

Phân tích

- Sử dụng TABLE và SOLVE tìm được: $x\approx -0.6180339887$.
- Thay vào căn thức tìm nhân tử: $\sqrt{x+1}\approx 0.6180339887\approx -x$.

Bài giải

Điều kiện xác định: $\begin{cases}x\ge -1\\\sqrt{x^2+x+1}\ne -x\end{cases}\Leftrightarrow x>-1$.

Với $x>-1\Rightarrow x+\sqrt{x^2+x+1}>x+\sqrt{x^2}\Rightarrow x+\sqrt{x^2+x+1}>x+|x|\ge x-x\ge 0$

Do đó $x+\sqrt{x^2+x+1}>0\ \forall x>-1$.

Ta có: $\dfrac{x^3+x+1+x\left(\sqrt{x+1}\right)^3}{x+\sqrt{x^2+x+1}}\le 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^3+x+1+x\left(\sqrt{x+1}\right)^3\le 0\\ x>-1\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3+x+1+x(x+1)\sqrt{x+1}\le 0\\ x>-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3+x+1+\left(x^2+x\right)\sqrt{x+1}\le 0\\ x>-1\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -x^2+x+1+\left(x^2+x\right)\left(x+\sqrt{x+1}\right)\le 0\\ x>-1\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(x^2+x\right)\left(x+\sqrt{x+1}\right)-\left(x^2-(x+1)\right)\le 0\\ x>-1\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(x^2+x\right)\left(x+\sqrt{x+1}\right)-\left(x+\sqrt{x+1}\right)\left(x-\sqrt{x+1}\right)\le 0\\ x>-1\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(x+\sqrt{x+1}\right)\left(x^2+x-x+\sqrt{x+1}\right)\le 0\\ x>-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x+\sqrt{x+1}\right)\left(x^2+\sqrt{x+1}\right)\le 0\\ x>-1\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+\sqrt{x+1}\le 0\\ x>-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+1}\le -x\\ x>-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1\le x^2\\ 0\ge x>-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x-1\ge 0\\ 0\ge x>-1\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x\ge \dfrac{1+\sqrt5}{2}\\ x\le \dfrac{1-\sqrt5}{2}\end{array}\right.\\ 0\ge x>-1\end{cases} \Rightarrow -1<x\le \dfrac{1-\sqrt5}{2} \Rightarrow x\in\left(-1;\dfrac{1-\sqrt5}{2}\right]$

Kết luận: Tập nghiệm của bất phương trình $S=\left(-1;\dfrac{1-\sqrt5}{2}\right]$.

Bài 17: Giải phương trình trên tập số thực:

$\left(1+\sqrt{1+x}\right)\left(\sqrt{2x^2-2x+1}+x-1\right)=x\sqrt{x}$

Phân tích

- Sử dụng TABLE và SOLVE tìm được: $x\approx 0.3819660113$.
- Thay vào căn thức tìm nhân tử:

$\begin{cases} \sqrt{x}\approx 0.6180339887\approx 1-x\\ \sqrt{2x^2-2x+1}\approx 0.726542528\\ \sqrt{x^2+x}\approx 0.726542528\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x}=1-x\\ \sqrt{2x^2-2x+1}=\sqrt{x^2+x}\end{cases}$

Bài giải

Điều kiện xác định: $x\ge 0$.

Ta có: $\left(1+\sqrt{1+x}\right)\left(\sqrt{2x^2-2x+1}+x-1\right)=x\sqrt{x}$

$\Leftrightarrow \left(1+\sqrt{1+x}\right)\left(\sqrt{2x^2-2x+1}+x-1\right)=\left(1+\sqrt{1+x}\right)\left(\sqrt{1+x}-1\right)\sqrt{x}$

Vì $1+\sqrt{x+1}>0$ do đó ta có:

$$\left(1+\sqrt{1+x}\right)\left(\sqrt{2x^2-2x+1}+x-1\right)=\left(1+\sqrt{1+x}\right)\left(\sqrt{1+x}-1\right)\sqrt{x}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x^2-2x+1}+x-1=\left(\sqrt{1+x}-1\right)\sqrt{x}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x^2-2x+1}-\sqrt{x^2+x}+x-1+\sqrt{x}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(2x^2-2x+1\right)-\left(x^2+x\right)}{\sqrt{2x^2-2x+1}+\sqrt{x^2+x}}+x-1+\sqrt{x}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-3x+1}{\sqrt{2x^2-2x+1}+\sqrt{x^2+x}}+x-1+\sqrt{x}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(x-1\right)^2-x}{\sqrt{2x^2-2x+1}+\sqrt{x^2+x}}+x-1+\sqrt{x}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(x-1+\sqrt{x}\right)\left(x-1-\sqrt{x}\right)}{\sqrt{2x^2-2x+1}+\sqrt{x^2+x}}+x-1+\sqrt{x}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x-1+\sqrt{x}\right)\frac{x-1-\sqrt{x}}{\sqrt{2x^2-2x+1}+\sqrt{x^2+x}}+1=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x-1+\sqrt{x}\right)\left(x-1-\sqrt{x}+\sqrt{2x^2-2x+1}+\sqrt{x^2+x}\right)=0$$

Trường hợp 1: $x-1+\sqrt{x}=0 \Leftrightarrow 1-x=\sqrt{x} \Leftrightarrow \begin{cases} 0\le x\le 1 \\ \left(1-x\right)^2=x \end{cases} \Rightarrow x=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$

Trường hợp 2: $\begin{cases} x-1-\sqrt{x}+\sqrt{2x^2-2x+1}+\sqrt{x^2+x}=0 \\ \sqrt{2x^2-2x+1}-\sqrt{x^2+x}+x-1+\sqrt{x}=0 \end{cases}$

Cộng hai vế của hai phương trình trên ta được:

$$2\sqrt{2x^2-2x+1}+2x-2=0 \Leftrightarrow \sqrt{2x^2-2x+1}=1-x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x^2-2x+1=\left(1-x\right)^2 \\ 0\le x\le 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2=0 \\ 0\le x\le 1 \end{cases} \Rightarrow x=0$$

Kết luận: Tập nghiệm của phương trình $S=\left\{\frac{3-\sqrt{5}}{2};0\right\}$.

Bài 18: Giải phương trình trên tập số thực:

$$\left(6x^2+12x-6\right)\sqrt{2x-1}=x^3+22x^2-11x$$

Phân tích

- Sử dụng TABLE và SOLVE tìm được: $\begin{cases} x\approx 7.464101615 \\ x\approx 17.48529137 \end{cases}$.
- Thay $x\approx 7.464101615$ vào căn thức ta được: $x\approx 2\sqrt{2x-1}$.
- Thay $x\approx 17.48529137$ vào căn thức ta được: $x\approx 3\sqrt{2x-1}$.

Bài giải

Điều kiện xác định: $x \ge \frac{1}{2}$.

Ta có: $\left(6x^2+12x-6\right)\sqrt{2x-1}=x^3+22x^2-11x$

$\Leftrightarrow x^3+22x^2-11x-\left(6x^2+12x-6\right)\sqrt{2x-1}=0$

$\Leftrightarrow -2x^3+16x^2-8x+\left(3x^2+6x-3\right)\left(x-2\sqrt{2x-1}\right)=0$

$\Leftrightarrow -2x\left(x^2-4\left(2x-1\right)\right)+\left(3x^2+6x-3\right)\left(x-2\sqrt{2x-1}\right)=0$

$\Leftrightarrow -2x\left(x-2\sqrt{2x-1}\right)\left(x+2\sqrt{2x-1}\right)+\left(3x^2+6x-3\right)\left(x-2\sqrt{2x-1}\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(x-2\sqrt{2x-1}\right)\left(3x^2+6x-3-2x\left(x+2\sqrt{2x-1}\right)\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(x-2\sqrt{2x-1}\right)\left(x^2+6x-3-4x\sqrt{2x-1}\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(x-2\sqrt{2x-1}\right)\left(3x^2+18x-9-12x\sqrt{2x-1}\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(x-2\sqrt{2x-1}\right)\left(-x^2+18x-9+4x\left(x-3\sqrt{2x-1}\right)\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(x-2\sqrt{2x-1}\right)\left(-\left(x^2-9\left(2x-1\right)\right)+4x\left(x-3\sqrt{2x-1}\right)\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(x-2\sqrt{2x-1}\right)\left(-\left(x-3\sqrt{2x-1}\right)\left(x+3\sqrt{2x-1}\right)+4x\left(x-3\sqrt{2x-1}\right)\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(x-2\sqrt{2x-1}\right)\left(x-3\sqrt{2x-1}\right)\left(4x-x-3\sqrt{2x-1}\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(x-2\sqrt{2x-1}\right)\left(x-3\sqrt{2x-1}\right)\left(x-\sqrt{2x-1}\right)=0$

Trường hợp 1: $\begin{cases} x^2-8x+4=0 \\ x \ge \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow x=4\pm 2\sqrt{3}$

Trường hợp 2: $\begin{cases} x^2-18x+9=0 \\ x \ge \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow x=9\pm 6\sqrt{2}$

Trường hợp 3: $\begin{cases} 3x-3\sqrt{2x-1}=0 \\ x \ge \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow x=1$

Kết luận: Tập nghiệm của phương trình $S=\left\{4\pm 2\sqrt{3};9\pm 6\sqrt{2};1\right\}$.

Bài 19: Giải phương trình trên tập số thực:

$\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}+\sqrt{4-x^2}=2x^2+2x-2$

Phân tích

- Sử dụng TABLE và SOLVE tìm được: $x \approx 1.322875656$.

- Thay vào căn thức tìm nhân tử: $\begin{cases}\sqrt{2+x}\approx 1.822875656\approx x+\dfrac{1}{2}\\ \sqrt{2-x}\approx 0.822875656\approx x-\dfrac{1}{2}\\ \sqrt{4-x^2}=\dfrac{3}{2}\end{cases}$.

Bài giải

Cách 1: Liên hợp cơ bản:

Điều kiện xác định: $-2\le x\le 2$.

Ta có: $\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}+\sqrt{4-x^2}=2x^2+2x-2$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{2+x}+2\sqrt{2-x}+2\sqrt{4-x^2}=4x^2+4x-4$

$\Leftrightarrow 4x^2-7+\left(2x+1-2\sqrt{2+x}\right)+\left(2x-1-2\sqrt{2-x}\right)+\left(3-2\sqrt{4-x^2}\right)=0$

$\Leftrightarrow 4x^2-7+\dfrac{(2x+1)^2-4(2+x)}{2x+1+2\sqrt{2+x}}+\dfrac{(2x-1)^2-4(2-x)}{2x-1+2\sqrt{2-x}}+\dfrac{3-4\left(4-x^2\right)}{3+2\sqrt{4-x^2}}=0$

$\Leftrightarrow 4x^2-7+\dfrac{4x^2-7}{2x+1+2\sqrt{2+x}}+\dfrac{4x^2-7}{2x-1+2\sqrt{2-x}}+\dfrac{4x^2-7}{3+2\sqrt{4-x^2}}=0$

$\Leftrightarrow \left(4x^2-7\right)\left(1+\dfrac{1}{2x+1+2\sqrt{2+x}}+\dfrac{1}{2x-1+2\sqrt{2-x}}+\dfrac{1}{3+2\sqrt{4-x^2}}\right)=0$ (*).

Điều kiện có nghiệm: Ta thấy: $2x^2+2x-2=\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}+\sqrt{4-x^2}$

$\Leftrightarrow 2x^2+2x-2=\sqrt{2+x+2-x+2\sqrt{2+x}\sqrt{2-x}}+\sqrt{4-x^2}$

$\Leftrightarrow 2x^2+2x-2=\sqrt{4+2\sqrt{4-x^2}}+\sqrt{4-x^2}\ge\sqrt{4}+\sqrt{4-x^2}\ge 2$

$\Leftrightarrow 2x^2+2x-4\ge 0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x\ge 1\\ x\le -2\end{array}\right.$. Kết hợp điều kiện xác định $\Rightarrow\left[\begin{array}{l}2\ge x\ge 1\\ x=-2\end{array}\right.$.

Do đó từ (*) ta có hai trường hợp sau:

Trường hợp 1: $\begin{cases}4x^2-7=0\\ \left[\begin{array}{l}x\ge 1\\ x\le -2\end{array}\right.\end{cases}\Rightarrow x=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$.

Trường hợp 2: $1+\dfrac{1}{2x+1+2\sqrt{2+x}}+\dfrac{1}{2x-1+2\sqrt{2-x}}+\dfrac{1}{3+2\sqrt{4-x^2}}=0$ (**)

Với $x=-2$ ta thấy -2 là một nghiệm của (**).

Với $1\le x\le 2$ ta thấy:

$\begin{cases}2x+1>0\\ 2x-1\ge 1>0\end{cases}\Rightarrow 1+\dfrac{1}{2x+1+2\sqrt{2+x}}+\dfrac{1}{2x-1+2\sqrt{2-x}}+\dfrac{1}{3+2\sqrt{4-x^2}}>0$

Do đó (**) có nghiệm duy nhất $x=-2$.

Kết luận: Tập nghiệm của phương trình $S=\left\{\dfrac{\sqrt{7}}{2};-2\right\}$.

Chú ý: Đánh giá phụ kết nối hai căn: $\begin{cases}\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}}\\ \sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}=\sqrt[3]{a+b+3\sqrt[3]{ab}\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)}\end{cases}$

Cách 2: Sử dụng đánh giá phụ và liên hợp ngược:

Điều kiện xác định: $-2\le x\le 2$.

Ta có: $\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}+\sqrt{4-x^2}=2x^2+2x-2$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{2+x}+2\sqrt{2-x}+2\sqrt{4-x^2}=4x^2+4x-4$

$\Leftrightarrow \left(4x^2-4-2\sqrt{4-x^2}\right)+2\left(2x-\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(2x-\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}\right)\left(2x+\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}\right)+2\left(2x-\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(2x-\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}\right)\left(2x+2+\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(2x-\sqrt{4+2\sqrt{4-x^2}}\right)\left(2x+2+\sqrt{4+2\sqrt{4-x^2}}\right)=0$

Trường hợp 1: $2x=\sqrt{4+2\sqrt{4-x^2}}\Leftrightarrow\begin{cases}0\le x\le 2\\ 4x^2=4+2\sqrt{4-x^2}\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}1\le x\le 2\\ \left(2x^2-2\right)^2=4-x^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1\le x\le 2\\ 4x^4-7x^2=0\end{cases}\Rightarrow x=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$

Trường hợp 2: $\sqrt{4+2\sqrt{4-x^2}}=-\left(2x+2\right)\Leftrightarrow\begin{cases}-2\le x\le -1\\ 4+2\sqrt{4-x^2}=4x^2+8x+4\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}-2\le x\le -1\\ \sqrt{2-x}\sqrt{2+x}=2x\left(x+2\right)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2\le x\le -1\\ \sqrt{2+x}\left(2x\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}\right)=0\end{cases}$

Vì $2x\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}<0\forall -2\le x\le -1\Rightarrow\sqrt{2+x}=0\Leftrightarrow x=-2$

Kết luận: Tập nghiệm của phương trình $S=\left\{\dfrac{\sqrt{7}}{2};-2\right\}$.

Cách 3: Ép tích bằng ẩn phụ:

Điều kiện xác định: $-2\le x\le 2$.

Đặt $t=\sqrt{2+x}\Rightarrow 0\le t\le 2$.

Ta có: $\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}+\sqrt{4-x^2}=2x^2+2x-2$

$\Leftrightarrow t+\sqrt{4-t^2}+t\sqrt{4-t^2}=2\left(t^2-2\right)^2+2\left(t^2-2\right)-2$

$\Leftrightarrow \left(t+1\right)\sqrt{4-t^2}=2t^4-6t^2-t+2$

$\Leftrightarrow \left(t-1-\sqrt{4-t^2}\right)\left(t+1\right)+\left(2t^4-7t^2-t+3\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(t-1-\sqrt{4-t^2}\right)\left(t+1\right)+\left(2t^4-7t^2-t+3\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(2t^2-2t-3\right)\left(t^2+t-1\right)+\left(t-1-\sqrt{4-t^2}\right)\left(t+1\right)=0$

$\Leftrightarrow\left(t-1-\sqrt{4-t^2}\right)\left(t-1+\sqrt{4-t^2}\right)\left(t^2+t-1\right)+\left(t-1-\sqrt{4-t^2}\right)(t+1)=0$

$\Leftrightarrow\left(t-1-\sqrt{4-t^2}\right)\left(\left(t-1+\sqrt{4-t^2}\right)\left(t^2+t-1\right)+t+1\right)=0$

$\Leftrightarrow\left(t-1-\sqrt{4-t^2}\right)\left(t^3-t+2+\left(t^2+t-1\right)\sqrt{4-t^2}\right)=0$

$\Leftrightarrow\left(t-1-\sqrt{4-t^2}\right)\left(\left(t^3-2t\right)+\left(t^2+t\right)\sqrt{4-t^2}+\left(t+2-\sqrt{4-t^2}\right)\right)=0$

$\Leftrightarrow\left(t-1-\sqrt{4-t^2}\right)\left(t\left(t^2-2+(t+1)\sqrt{4-t^2}\right)+\left(t+2-\sqrt{4-t^2}\right)\right)=0$

$\Leftrightarrow\left(t-1-\sqrt{4-t^2}\right)\left(2t(t+2)\left(t^2-2+(t+1)\sqrt{4-t^2}\right)+2(t+2)\left(t+2-\sqrt{4-t^2}\right)\right)=0$

Chú ý rằng: $2t(t+2)=\left(t+2-\sqrt{4-t^2}\right)\left(t+2+\sqrt{4-t^2}\right)$. Do đó:

$\left(t-1-\sqrt{4-t^2}\right)\left(t+2-\sqrt{4-t^2}\right)\left(\left(t+2+\sqrt{4-t^2}\right)\left(t^2-2+(t+1)\sqrt{4-t^2}\right)+2(t+2)\right)=0$

$\Leftrightarrow\left(t-1-\sqrt{4-t^2}\right)\left(t+2-\sqrt{4-t^2}\right)\left(t^2+4t+4+\left(2t^3+3t\right)\sqrt{4-t^2}\right)=0$

$\Leftrightarrow\left(\sqrt{2+x}-1-\sqrt{2-x}\right)\left(\sqrt{2+x}+2-\sqrt{2-x}\right)A=0$

Trong đó: $A=6+x+4\sqrt{2+x}+(2x+7)\sqrt{4-x^2}>0\forall x\in[-2;2]$. Vậy:

Trường hợp 1: $\sqrt{2+x}=1+\sqrt{2-x}\Leftrightarrow 2+x=3-x+2\sqrt{2-x}$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{2-x}=2x-1\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{2}\le x\le 2\\ 4(2-x)=4x^2-4x+1\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{\sqrt{7}}{2}$ (Thỏa mãn).

Trường hợp 2: $\sqrt{2+x}+2-\sqrt{2-x}=0$

$\Leftrightarrow\sqrt{2+x}\left(2+\sqrt{2-x}\right)+\left(2-\sqrt{2-x}\right)\left(2+\sqrt{2-x}\right)=0$

$\Leftrightarrow\sqrt{2+x}\left(2+\sqrt{2-x}\right)+x+2=0\Leftrightarrow\sqrt{2+x}\left(2+\sqrt{2-x}+\sqrt{2+x}\right)=0$

Vì $2+\sqrt{2-x}+\sqrt{2+x}>0$ do đó $x=-2$ (Thỏa mãn điều kiện).

Kết luận: Tập nghiệm của phương trình $S=\left\{\frac{\sqrt{7}}{2};-2\right\}$.

Bài 20: Giải phương trình trên tập số thực:

$4\left(x^3+1\right)=\left(x+\sqrt{x^2-2x+2}\right)^3$

(Trích đề luyện thi số 01 thầy Đặng Thành Nam – VTED.VN)

Điều kiện xác định: $x\in\mathbb{R}$.

Ta có: $4\left(x^3+1\right)=\left(x+\sqrt{x^2-2x+2}\right)^3$

$\Leftrightarrow 6x^2-6x+4-\left(4x^2-2x+2\right)\sqrt{x^2-2x+2}=0$

$\Leftrightarrow 2(x-1)^2-\left(4x^2-2x+2\right)\left(\sqrt{x^2-2x+2}-1\right)=0$

$\Leftrightarrow 2\left(\sqrt{x^2-2x+2}-1\right)\left(\sqrt{x^2-2x+2}+1\right)-\left(4x^2-2x+2\right)\left(\sqrt{x^2-2x+2}-1\right)=0$

$\Leftrightarrow 2\left(\sqrt{x^2-2x+2}-1\right)\left(\sqrt{x^2-2x+2}-2x^2+x\right)=0$

Trường hợp 1: $\sqrt{x^2-2x+2}-1=0 \Leftrightarrow x=1$

Trường hợp 2: $\sqrt{x^2-2x+2}=2x^2-x \Leftrightarrow \begin{cases} x\le 0 \vee x\ge \frac{1}{2} \\ x^2-2x+2=4x^4-4x^3+x^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x\le 0 \vee x\ge \frac{1}{2} \\ 4x^4-4x^3+2x-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le 0 \vee x\ge \frac{1}{2} \\ (x-1)(4x^3+2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \end{array}\right.$

Kết luận: Tập nghiệm của phương trình $S=\left\{1;-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right\}$.

Bài 21: Giải phương trình trên tập số thực:

$5x-6+5\sqrt{x-1}+\sqrt{x^2-1}=0$

Điều kiện xác định: $x\ge 1$.

Đặt $t=\sqrt{x-1}$, phương trình trở thành: $5t^2-1+5t+t\sqrt{t^2+2}=0$

$\Leftrightarrow -\left(3t+1-\sqrt{t^2+2}\right)t+\left(8t^2+6t-1\right)=0$

$\Leftrightarrow -\left(3t+1-\sqrt{t^2+1}\right)t+\left(3t+1-\sqrt{t^2+1}\right)\left(3t+1+\sqrt{t^2+1}\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(3t+1-\sqrt{t^2+1}\right)\left(2t+1+\sqrt{t^2+1}\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(3\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}+1\right)\left(\sqrt{x+1}+2\sqrt{x-1}+1\right)=0$

Vì $\sqrt{x+1}+2\sqrt{x-1}+1>0$ do đó $3\sqrt{x-1}+1=\sqrt{x+1}$

$\Leftrightarrow 9x-8+6\sqrt{x-1}=x+1 \Leftrightarrow 6\sqrt{x-1}=9-8x$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 1\le x\le \frac{9}{8} \\ 36(x-1)=(9-8x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{45-3\sqrt{17}}{32}$ (Thỏa mãn điều kiện).

Kết luận: Tập nghiệm của phương trình $S=\left\{\frac{45-3\sqrt{17}}{32}\right\}$.

Bài 22: Giải phương trình trên tập số thực:

$4x+3+2\sqrt{1-x^2}-4\sqrt{1+x}=0$

Điều kiện xác định: $-1\le x\le 1$.

Đặt $t=\sqrt{1+x}$, phương trình trở thành:

$4t^2-4t-1+2t\sqrt{2-t^2}=0 \Leftrightarrow 2t\left(t-1+\sqrt{2-t^2}\right)+\left(2t^2-2t-1\right)=0$

$\Leftrightarrow 2t\left(t-1+\sqrt{2-t^2}\right)+\left(t-1+\sqrt{2-t^2}\right)\left(t-1-\sqrt{2-t^2}\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(3t-1-\sqrt{2-t^2}\right)\left(t-1+\sqrt{2-t^2}\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(3\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}-1\right)\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-1\right)=0$

Trường hợp 1: $3\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}-1=0 \Leftrightarrow 3\sqrt{1+x}=\sqrt{1-x}+1$

$\Leftrightarrow 9x+9=2-x+2\sqrt{1-x} \Leftrightarrow 10x+7=2\sqrt{1-x}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{7}{10}\le x\le 1 \\ (10x+7)^2=4(1-x) \end{cases} \Leftrightarrow x=\dfrac{3\sqrt{19}-36}{50}$ (Thỏa mãn điều kiện).

Trường hợp 2: $\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-1=0 \Leftrightarrow \sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}=1$

$\Leftrightarrow 2+2\sqrt{1-x^2}=1 \Leftrightarrow 2\sqrt{1-x^2}=-1$ (Phương trình vô nghiệm).

Kết luận: Tập nghiệm của phương trình $S=\left\{\dfrac{3\sqrt{19}-36}{50}\right\}$.

Bài 22: Giải phương trình trên tập số thực:

$x\sqrt{x^3-3x}+\sqrt{x^2-3}-x-3-\sqrt{x}=0$

Điều kiện xác định: $x\ge\sqrt{3}$.

Đặt $t=\sqrt{x}$. Khi đó phương trình trở thành:

$t^2\sqrt{t^6-3t^2}+\sqrt{t^4-3}-t^2-3-t=0$

$\Leftrightarrow t^3\sqrt{t^4-3}+\sqrt{t^4-3}-t^2-t-3=0$

$\Leftrightarrow \left(t^3+1\right)\sqrt{t^4-3}-t^2-t-3=0$

$\Leftrightarrow \left(t^3+1\right)\left(\sqrt{t^4-3}-t\right)+t^4-t^2-3=0$

$\Leftrightarrow \left(t^3+1\right)\left(\sqrt{t^4-3}-t\right)+\left(\sqrt{t^4-3}-t\right)\left(\sqrt{t^4-3}+t\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{t^4-3}-t\right)\left(t^3+t+1+\sqrt{t^4-3}\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2-3}-\sqrt{x}\right)\left((x+1)\sqrt{x}+\sqrt{x^2-3}+1\right)=0$.

Chú ý rằng: $(x+1)\sqrt{x}+\sqrt{x^2-3}+1>0, \forall x\ge\sqrt{3}$.

Do đó: $\sqrt{x^2-3}-\sqrt{x}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x-3=0 \\ x\ge\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow x=\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$.

Kết luận: Tập nghiệm của phương trình $S=\left\{\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}\right\}$.

Bài 23: Giải phương trình trên tập số thực:

$x^2-9x+8+\sqrt{6x^2-x-1}=\left(2x^2-1\right)\sqrt{2x-1}-\left(x^2+2\right)\sqrt{3x+1}$

Điều kiện xác định: $x\ge\dfrac{1}{2}$.

Đặt ẩn phụ $t=\sqrt{2x-1}$. Khi đó phương trình trở thành:

$4t^5-2t^4+8t^3+32t^2-4t-30-\left(t^4+2t^2+4t+9\right)\sqrt{6t^2+10}=0$

$\Leftrightarrow 20t^2-32t-12+\left(t^4+2t^2+4t+9\right)\left(4t-2-\sqrt{6t^2+10}\right)=0$

$\Leftrightarrow 2\left(10t^2-16t-6\right)+\left(t^4+2t^2+4t+9\right)\left(4t-2-\sqrt{6t^2+10}\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(4t-2-\sqrt{6t^2+10}\right)\left(2\left(4t-2+\sqrt{6t^2+10}\right)+t^4+2t^2+4t+9\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(4t-2-\sqrt{6t^2+10}\right)\left(2\sqrt{6t^2+10}+t^4+2t^2+12t+5\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(4\sqrt{2x-1}-2\sqrt{3x+1}-2\right)\left(4\sqrt{3x+1}+12\sqrt{2x-1}+4x^2+4\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(2\sqrt{2x-1}-\sqrt{3x+1}-1\right)\left(3\sqrt{2x-1}+\sqrt{3x+1}+x^2+1\right)=0$

Vì $3\sqrt{2x-1}+\sqrt{3x+1}+x^2+1>0, \forall x\ge\dfrac{1}{2}$.

Do đó: $2\sqrt{2x-1}-\sqrt{3x+1}-1=0 \Leftrightarrow 2\sqrt{2x-1}=\sqrt{3x+1}+1$

$\Leftrightarrow 4(2x-1)=3x+1+1+2\sqrt{3x+1} \Leftrightarrow 8x-4=3x+2+2\sqrt{3x+1}$

$\Leftrightarrow 5x-6=2\sqrt{3x+1} \Leftrightarrow \begin{cases}(5x-6)^2=4(3x+1)\\ x\ge\dfrac{6}{5}\end{cases} \Leftrightarrow x=\dfrac{36+4\sqrt{31}}{25}$

Kết luận: Tập nghiệm của phương trình $S=\left\{\dfrac{36+4\sqrt{31}}{25}\right\}$.

Bài 24: Giải phương trình trên tập số thực:

$x^2+2x-1+(x-1)\sqrt{x+2}=0$

Điều kiện xác định $x\ge -2$.

Ta có: $x^2+2x-1+(x-1)\sqrt{x+2}=0$. $\Leftrightarrow \left(2x+3+2\sqrt{x+2}\right)\left(x+1-\sqrt{x+2}\right)=0$

Trường hợp 1: $x+1=\sqrt{x+2} \Leftrightarrow \begin{cases}x+1\ge 0\\ (x+1)^2=x+2\end{cases} \Leftrightarrow x=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$

Trường hợp 2: $2x+3=-2\sqrt{x+2} \Leftrightarrow \begin{cases}-2\le x\le -\dfrac{3}{2}\\ (2x+3)^2=4(x+2)\end{cases} \Leftrightarrow x=-\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}$

Kết luận: Tập nghiệm của phương trình $S=\left\{\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2};-\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}\right\}$.

Bài 25: Giải phương trình trên tập số thực:

$\left(x^2-5x\right)\sqrt{5x^2-3x+6}=2x^3-12x^2+16x-15$

Điều kiện xác định $x\in\mathbb{R}$

Ta có: $\left(x^2-5x\right)\sqrt{5x^2-3x+6}=2x^3-12x^2+16x-15$

$\Leftrightarrow \left(6x+3-\sqrt{5x^2-3x+6}\right)\left(x^2+x+6+\sqrt{5x^2-3x+6}\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(6x+3-\sqrt{5x^2-3x+6}\right)\left(\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{23}{4}+\sqrt{5x^2-3x+6}\right)=0.$

Vì $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{23}{4}+\sqrt{5x^2-3x+6}>0\forall x\in\mathbb{R}$.

Do đó: $6x+3=\sqrt{5x^2-3x+6}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq-\frac{1}{2}\\(6x+3)^2=5x^2-3x+6\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{-39+\sqrt{1149}}{62}$

Kết luận: Tập nghiệm của phương trình $S=\left\{\frac{-39+\sqrt{1149}}{62}\right\}$.

Bài 26: Giải phương trình trên tập số thực:

$$\frac{2\sqrt{x^2+3x-3}}{\sqrt{3x+2}}-\frac{3}{\sqrt{x^2+4}}=6-x^2$$

Điều kiện xác định $x\geq\frac{-3+\sqrt{21}}{2}$.

Ta có: $\frac{2\sqrt{x^2+3x-3}}{\sqrt{3x+2}}-\frac{3}{\sqrt{x^2+4}}=6-x^2$

$$\Leftrightarrow 2\left(\frac{\sqrt{x^2+3x-3}}{\sqrt{3x+2}}-1\right)+\left(x^2-5\right)+\left(1-\frac{3}{\sqrt{x^2+4}}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{2\left(\sqrt{x^2+3x-3}-\sqrt{3x+2}\right)}{\sqrt{3x+2}}+\left(x^2-5\right)+\frac{\sqrt{x^2+4}-3}{\sqrt{x^2+4}}=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{2\left(x^2-5\right)}{\sqrt{3x+2}\left(\sqrt{x^2+3x-3}+\sqrt{3x+2}\right)}+\left(x^2-5\right)+\frac{x^2-5}{\left(\sqrt{x^2+4}+3\right)\sqrt{x^2+4}}=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x^2-5\right)\left[\frac{2}{\sqrt{3x+2}\left(\sqrt{x^2+3x-3}+\sqrt{3x+2}\right)}+1+\frac{1}{\left(\sqrt{x^2+4}+3\right)\sqrt{x^2+4}}\right]=0$$

$\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{5}$. Kết hợp điều kiện ta có $x=\sqrt{5}$ là nghiệm duy nhất.

Kết luận: Tập nghiệm của phương trình $S=\left\{\sqrt{5}\right\}$

Bài 27: Giải bất phương trình trên tập số thực:

$$\sqrt{\frac{x^2+x+1}{x+3}}+\frac{x^2}{2}\leq\frac{2}{\sqrt{x^2+2}}+1$$

Điều kiện xác định $x>-3$.

Ta có: $\sqrt{\frac{x^2+x+1}{x+3}}+\frac{x^2}{2}\leq\frac{2}{\sqrt{x^2+2}}+1\Leftrightarrow\left(\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{\sqrt{x+3}}-\frac{2}{\sqrt{x^2+2}}\right)+\left(\frac{x^2}{2}-1\right)\leq0$

$$\Leftrightarrow\frac{\sqrt{x^2+x+1}\sqrt{x^2+2}-2\sqrt{x+3}}{\sqrt{x^2+2}\sqrt{x+3}}+\frac{x^2-2}{2}\leq0$$

$$\Leftrightarrow\frac{\left(x^2-2\right)\left(x^2+x+5\right)}{\left(\sqrt{x^2+x+1}\sqrt{x^2+2}+2\sqrt{x+3}\right)\sqrt{x^2+2}\sqrt{x+3}}+\frac{x^2-2}{2}\leq0$$

$$\Leftrightarrow\left(x^2-2\right)\left(\frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{19}{4}}{\left(\sqrt{x^2+x+1}\sqrt{x^2+2}+2\sqrt{x+3}\right)\sqrt{x^2+2}\sqrt{x+3}}+\frac{1}{2}\right)\le 0.$$

Do đó ta có: $-2\le x\le 2$.

Kết luận: Tập nghiệm của bất phương trình $S=\left[-2;2\right]$.

Bài 28: Giải phương trình trên tập số thực:

$\sqrt{2x^2+16x+18}+\sqrt{x^2-1}=2(x+2)$

Điều kiện xác định: $x\le -1\vee x\ge 1$.

Ta có: $\sqrt{2x^2+16x+18}+\sqrt{x^2-1}=2(x+2)$

$$\Leftrightarrow\left[\sqrt{2x^2+16x+18}-2(x+2)\right]+\sqrt{x^2-1}=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{-2x^2+2}{\sqrt{2x^2+16x+18}+2(x+2)}+\sqrt{x^2-1}=0$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{x^2-1}\left(\frac{-2\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{2x^2+16x+18}+2(x+2)}+1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{x^2-1}\left(2x+2+\sqrt{2x^2+16x+18}-2\sqrt{x^2-1}\right)=0$$

Trường hợp 1: $\sqrt{x^2-1}=0\Leftrightarrow x=\pm 1$.

Trường hợp 2: $2x+2+\sqrt{2x^2+16x+18}-2\sqrt{x^2-1}=0$.

Đến đây ta kết hợp với phương trình ban đầu:

$\begin{cases}2x+2+\sqrt{2x^2+16x+18}-2\sqrt{x^2-1}=0\\ \sqrt{2x^2+16x+18}+\sqrt{x^2-1}=2(x+2)\end{cases}$. Trừ vế với vế ta được:

$$2x+2-2\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2-1}=-2(x+2)\Leftrightarrow 4(x+2)=3\sqrt{x^2-1}\Leftrightarrow x=\frac{3\sqrt{57}-32}{7}$$

Kết luận: Tập nghiệm của phương trình $S=\left\{\pm 1;\frac{3\sqrt{57}-32}{7}\right\}$.

Bài 29: Giải phương trình trên tập số thực:

$\left(x^2+x+1\right)\sqrt{2x^2+8x-3}=x^3+2x^2-x+9$

Điều kiện xác định: $x\in\left(-\infty;\frac{-4-\sqrt{22}}{2}\right]\cup\left[\frac{-4+\sqrt{22}}{2};+\infty\right)$.

Ta có: $\left(x^2+x+1\right)\sqrt{2x^2+8x-3}=x^3+2x^2-x+9$

$$\Leftrightarrow\left(x+2-\sqrt{2x^2+8x-3}\right)\left(x^2+2x+3+\sqrt{2x^2+8x-3}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x+2-\sqrt{2x^2+8x-3}\right)\left((x+1)^2+1+\sqrt{2x^2+8x-3}\right)=0$$

Vì $(x+1)^2+1+\sqrt{2x^2+8x-3}>0, \forall x \in \left(-\infty; \frac{-4-\sqrt{22}}{2}\right] \cup \left[\frac{-4+\sqrt{22}}{2}; +\infty\right)$.

Do đó: $x+2=\sqrt{2x^2+8x-3} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2 \geq 0 \\ (x+2)^2 = 2x^2+8x-3 \end{cases} \Leftrightarrow x=-2+\sqrt{11}$

Kết luận: Tập nghiệm của phương trình $S=\left\{-2+\sqrt{11}\right\}$.

Bài 30: Giải phương trình trên tập số thực:
$(x^2-5)\sqrt{2x^2-x+11}=x^3+16x-21$

Điều kiện xác định: $x \in \mathbb{R}$.

Ta có: $(x^2-5)\sqrt{2x^2-x+11}=x^3+16x-21$

$\Leftrightarrow \left(x+3-\sqrt{2x^2-x+11}\right)\left(2x^2+6x+8+\sqrt{2x^2-x+11}\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(x+3-\sqrt{2x^2-x+11}\right)\left(2\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{2}+\sqrt{2x^2-x+11}\right)=0.$

Vì $2\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{2}+\sqrt{2x^2-x+11}>0 \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Do đó: $x+3=\sqrt{2x^2-x+11} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3 \geq 0 \\ (x+3)^2 = 2x^2-x+11 \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{7 \pm \sqrt{37}}{2}$

Kết luận: Tập nghiệm của phương trình $S=\left\{\frac{7 \pm \sqrt{37}}{2}\right\}$.

Bài 31: Giải phương trình trên tập số thực:
$15x^3+x^2-3x+2-(15x^2+x-5)\sqrt{x^2+x+1}=0$

Điều kiện xác định: $x \in \mathbb{R}$.

Ta có: $15x^3+x^2-3x+2-(15x^2+x-5)\sqrt{x^2+x+1}=0$

$\Leftrightarrow \left(15x^2-x-5-2\sqrt{x^2+x+1}\right)\left(x-\sqrt{x^2+x+1}\right)=0$

$\Leftrightarrow 2\left(2x-\sqrt{x^2+x+1}\right)\left(10x+2+5\sqrt{x^2+x+1}\right)\left(x-\sqrt{x^2+x+1}\right)=0$

Trường hợp 1: $2x-\sqrt{x^2+x+1}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 3x^2-x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{1+\sqrt{13}}{6}$.

Trường hợp 2: $5\sqrt{x^2+x+1}=-10x-2$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 25(x^2+x+1)=(10x+2)^2 \\ 10x+2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 75x^2+15x-21=0 \\ 10x+2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{-1-\sqrt{29}}{10}$.

Trường hợp 3: $x=\sqrt{x^2+x+1} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2=x^2+x+1 \end{cases}$ (vô nghiệm)

Kết luận: Tập nghiệm của phương trình $S=\left\{\frac{1+\sqrt{13}}{6}; \frac{-1-\sqrt{29}}{10}\right\}$.

Bài 32: Giải phương trình trên tập số thực:

$x^2+\sqrt{x+\sqrt{1-x}}+1=3x+2\sqrt{(1-x)^3}$

Điều kiện xác định: $x\le 1$.

Ta có: $x^2+\sqrt{x+\sqrt{1-x}}+1=3x+2\sqrt{(1-x)^3}$

$\Leftrightarrow x^2-3x-2(1-x)\sqrt{1-x}+\sqrt{x+\sqrt{1-x}}+1=0$

$\Leftrightarrow -x^2-x+1-2(1-x)\left(x+\sqrt{1-x}\right)+\sqrt{x+\sqrt{1-x}}=0$

$\Leftrightarrow (1-x)-x^2-2(1-x)\left(x+\sqrt{1-x}\right)+\sqrt{x+\sqrt{1-x}}=0$

$\Leftrightarrow \left(x+\sqrt{1-x}\right)\left(\sqrt{1-x}-x\right)-2(1-x)\left(x+\sqrt{1-x}\right)+\sqrt{x+\sqrt{1-x}}=0$

$\Leftrightarrow \left(x+\sqrt{1-x}\right)\left(\sqrt{1-x}+x-2\right)+\sqrt{x+\sqrt{1-x}}=0$

Đặt $\sqrt{x+\sqrt{1-x}}=t$. Phương trình trở thành:

$t^2\left(t^2-2\right)+t=0\Leftrightarrow t\left(t^3-2t+1\right)=0\Leftrightarrow t=0,t=1,t=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

Trường hợp 1: $t=0\Rightarrow\sqrt{x+\sqrt{1-x}}=0\Leftrightarrow\sqrt{1-x}=-x\Leftrightarrow x=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$.

Trường hợp 2: $t=1\Rightarrow\sqrt{x+\sqrt{1-x}}=1\Leftrightarrow\sqrt{1-x}=1-x\Leftrightarrow x=0,x=1$.

Trường hợp 3: $t=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\Rightarrow\sqrt{x+\sqrt{1-x}}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\Leftrightarrow x+\sqrt{1-x}=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$

$\Leftrightarrow (1-x)-\sqrt{1-x}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\Leftrightarrow\left(\sqrt{1-x}-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{2\sqrt{5}-1}{4}$

$\Leftrightarrow\sqrt{1-x}=\frac{1+\sqrt{2\sqrt{5}-1}}{2}\Leftrightarrow 1-x=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2\sqrt{5}-1}}{2}\Leftrightarrow x=\frac{2-\sqrt{5}-\sqrt{2\sqrt{5}-1}}{2}$.

Kết luận: Tập nghiệm của phương trình:

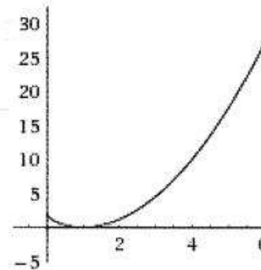
$S=\left\{\frac{-1-\sqrt{5}}{2};0;1;\frac{2-\sqrt{5}-\sqrt{2\sqrt{5}-1}}{2}\right\}$.

Chủ đề 4:
CÁC PHƯƠNG PHÁP XỬ LÝ BÀI TOÁN CHỨA NGHIỆM BỘI

I. Khái niệm nghiệm bội:

Nghiệm bội là nghiệm mà bản thân nghiệm đó cũng chính là hoành độ cực trị của hàm số.

Chẳng hạn trong hình bên, ta thấy hàm số có hình dáng tiếp xúc với trục hoành đồng thời điểm tiếp xúc đó cũng chính là nghiệm của phương trình (Nghiệm là giao điểm của đồ thị với trục hoành).



Do đó giá trị nghiệm đó, ta gọi là nghiệm bội của phương trình. Một số loại nghiệm bội cơ bản:

- Nghiệm bội 2: $(x-a)^2 A(x)$.
- Nghiệm bội 3: $(x-a)^3 A(x)$.
- Nghiệm bội 4: $(x-a)^4 A(x)$.
- Hai nghiệm bội 2: $(x-a)^2 (x-b)^2 A(x)$.

Bổ đề: Nếu $x=a$ là nghiệm bội của phương trình $f(x)=g(x)$, khi đó ta có:

$$\begin{cases} f(a)=g(a) \\ f'(a)=g'(a) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)\Big|_{x=a} = g(x)\Big|_{x=a} \\ f'(x)\Big|_{x=a} = g'(x)\Big|_{x=a} \end{cases}$$

Trong máy tính Casio, muốn tính đạo hàm $f'(x)$ của hàm số $f(x)$ tại giá trị $x=a$, ta sử dụng công cụ: $\frac{d}{dx}\left(f(x)\right)\Big|_{x=a}$.

II. Cách nhận diện và phương pháp giải bài toán nghiệm bội hữu tỷ:

Ví dụ: Giải phương trình trên tập số thực:
$x^2 - x + 1 - \sqrt{2x-1} = 0$

1. Phương pháp nhận diện bằng SOLVE và d/dx:

Bước 1: Bấm phương trình trên máy tính Casio và sử dụng SHIFT CALC (SOLVE) ta thu được $x=1$.	Math ▲ X²-X+1-√(2X-1) X= 1 L-R= 0
Bước 2: Kiểm tra điều kiện nghiệm bội bằng cách xét: $\frac{d}{dx}\left(x^2-x+1-\sqrt{2x-1}\right)\Big\|_{x=1}=0$ Vậy $x=1$ là nghiệm bội kép	Math ▲ d/dx(X²-X+1-√(2X-1) 0

Phân biệt nghiệm đơn và bội qua d/dx:

- $x=a$ là nghiệm bội của $f(x)=0$ nếu $\frac{d}{dx}(f(x))\Big|_{x=a}=0$.
- $x=a$ là nghiệm đơn của $f(x)=0$ nếu $\frac{d}{dx}(f(x))\Big|_{x=a}\neq 0$.

2. Phương pháp nhận diện bằng TABLE:

Bước 1: Xét $f(x)=x^2-x+1-\sqrt{2x-1}$. Lựa chọn các giá trị: Start = 0.5, End = 9.5, Step = 0.5.	Math f(X)=X²-X+1-√2X▶
Bước 2: Nhận xét: Hàm số tiếp xúc trục hoành tại điểm duy nhất $x=1$. Như vậy $x=1$ là nghiệm bội kép. **Phân biệt nghiệm đơn và nghiệm bội kép thông qua TABLE** • Hàm số đổi dấu khi đi qua trục hoành là nghiệm đơn. • Hàm số không đổi dấu khi đi qua trục hoành là nghiệm kép.	Math X | F(X) 1 | 0.5 | 0.75 2 | 1 | 0 3 | 1.5 | 0.3357 0.5 Math X | F(X) 4 | 2 | 1.2679 5 | 2.5 | 2.75 6 | 3 | 4.7639 3 Math X | F(X) 7 | 3.5 | 7.3005 8 | 4 | 10.354 9 | 4.5 | 13.921 4.5

3. Phân biệt các loại nghiệm bằng sự kết hợpSOLVE, d/dx và TABLE:

Nghiệm đơn	Là nghiệm đơn $f(x)=0$. Không phải nghiệm $f'(x)=0$.
Nghiệm kép	Là nghiệm kép $f(x)=0$. Không phải nghiệm kép $f''(x)=0$.
Nghiệm bội 3	Là nghiệm đơn $f(x)=0$. Là nghiệm kép $f'(x)=0$.
Nghiệm bội 4	Là nghiệm kép $f(x)=0$. Là nghiệm kép $f''(x)=0$.

Chú ý: Các bài toán nghiệm bội phần lớn là nghiệm kép.

4. Giải bài toán nghiệm bội hữu tỷ như thế nào?

Cách 1: Nhân liên hợp:

Tổng quát: Nếu $x=x_0$ là nghiệm bội kép hữu tỷ và phương trình có chứa căn thức $\sqrt[n]{A}$, khi đó ta đặt: $ax+b=\sqrt[n]{A}$

Ta tìm các hệ số a,b bằng cách giải hệ sau: $\begin{cases} ax_0+b=\sqrt[n]{A(x_0)} \\ a=\frac{d}{dx}\left(\sqrt[n]{A}\right)\Big|_{x=x_0} \end{cases}$

Chú ý:

- Nếu là nghiệm bội 3, ta đặt $ax^2+bx+c=\sqrt[n]{A}$.

Giải hệ: $\begin{cases} \left.\left(ax^2+bx+c\right)\right|_{x=x_0} = \sqrt[n]{A(x_0)} \\ \left.\left(ax^2+bx+c\right)'\right|_{x=x_0} = \left.\dfrac{d}{dx}\left(\sqrt[n]{A}\right)\right|_{x=x_0} \\ \left.\left(ax^2+bx+c\right)''\right|_{x=x_0} = \left.\dfrac{d}{dx}\left[\left(\sqrt[n]{A(x)}\right)'\right]\right|_{x=x_0} \end{cases}$

Trong đó $\left.\dfrac{d}{dx}\left[\left(\sqrt[n]{A(x)}\right)'\right]\right|_{x=x_0}$ là để tính đạo hàm cấp 2.

- Nếu có 2 nghiệm bội kép, ta có thể rút từng nghiệm kép ra lần lượt bằng nhân liên hợp (Liên hợp 2 lần liên tiếp) hoặc ta làm giống như nghiệm bội 3: Đặt $ax^2+bx+c=\sqrt[n]{A}$.

Giải hệ: $\begin{cases} \left.\left(ax^2+bx+c\right)\right|_{x=x_1} = \sqrt[n]{A(x_1)} \\ \left.\left(ax^2+bx+c\right)'\right|_{x=x_1} = \left.\dfrac{d}{dx}\left(\sqrt[n]{A}\right)\right|_{x=x_1} \\ \left.\left(ax^2+bx+c\right)\right|_{x=x_2} = \sqrt[n]{A(x_2)} \\ \left.\left(ax^2+bx+c\right)'\right|_{x=x_2} = \left.\dfrac{d}{dx}\left(\sqrt[n]{A}\right)\right|_{x=x_2} \end{cases}$

Bài giải

Trong bài toán này, ta có $x=1$ là nghiệm bội kép, đặt $ax+b=\sqrt{2x-1}$.

Khi đó ta sẽ tìm các hệ số a,b bằng cách giải hệ sau:

$$\begin{cases} \left.ax+b=\sqrt{2x-1}\right|_{x=1} \\ a=\left.\dfrac{d}{dx}\left(\sqrt{2x-1}\right)\right|_{x=1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=1 \\ a=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=0 \end{cases}$$

Vậy với $a=1,b=0$ ta có $x=\sqrt{2x-1}$ nên liên hợp cần tạo ra là $\left(x-\sqrt{2x-1}\right)$.

Điều kiện xác định: $x \ge \dfrac{1}{2}$.

Ta có: $x^2-x+1-\sqrt{2x-1}=0 \Leftrightarrow \left(x-\sqrt{2x-1}\right)+\left(x^2-2x+1\right)=0$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2-2x+1}{x+\sqrt{2x-1}}+\left(x^2-2x+1\right)=0 \Leftrightarrow (x-1)^2\left(\dfrac{1}{x+\sqrt{2x-1}}+1\right)=0 \Leftrightarrow x=1.$

Kết luận: Tập nghiệm của phương trình là $S=\{1\}$.

Cách 2: Tạo hằng đẳng thức (Chỉ nên áp dụng với nghiệm kép):

Điều kiện xác định: $x \ge \dfrac{1}{2}$.

Ta có: $x^2-x+1-\sqrt{2x-1}=0 \Leftrightarrow 2x^2-2x+2-2\sqrt{2x-1}=0$

$\Leftrightarrow \left(2x-1-2\sqrt{2x-1}+1\right)+2\left(x^2-2x+1\right)=0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{2x-1}-1\right)^2+2(x-1)^2=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x-1}-1=0 \\ x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=1$.

Kết luận: Tập nghiệm của phương trình là $S=\{1\}$.

Cách 3: Sử dụng đánh giá AM – GM (Chỉ nên áp dụng với nghiệm kép).

- AM – GM cho 2 số: $ab \le \dfrac{a^2+b^2}{2}$ $\forall a,b \in \mathbb{R}$. Do đó sử dụng bất đẳng thức này với những biểu thức chứa căn bậc 2 và lựa chọn 2 đại lượng a,b có giá trị bằng nhau vì dấu bằng xảy ra khi $a=b$.
- AM – GM cho 3 số: $abc \le \dfrac{a^3+b^3+c^3}{3}$ $\forall a,b,c \ge 0$. Do đó sử dụng với những biểu thức chứa căn bậc 3 và lựa chọn 3 đại lượng a,b,c không âm có giá trị bằng nhau vì dấu bằng xảy ra khi $a=b=c$.
- Tương tự như vậy ta có thể đánh giá bất đẳng thức AM – GM cho các căn bậc cao hơn.

Áp dụng: Vì $x=1 \Rightarrow \sqrt{2x-1}=1$. Vậy $a=\sqrt{2x-1}, b=1$ (AM – GM cho 2 số).

Điều kiện xác định: $x \ge \dfrac{1}{2}$.

Ta có: $\sqrt{2x-1}.1 \le \dfrac{2x-1+1}{2} \Leftrightarrow \sqrt{2x-1} \le x$.

Mà $x^2-x+1=\sqrt{2x-1}$. Do đó: $x^2-x+1 \le x \Leftrightarrow (x-1)^2 \le 0 \Leftrightarrow x=1$.

Kết luận: Tập nghiệm của phương trình là $S=\{1\}$.

Cách 4: Đặt ẩn phụ và phân tích nhân tử (Phương pháp này hoàn toàn độc lập và không bị lệ thuộc vào máy tính):

Điều kiện xác định: $x \ge \dfrac{1}{2}$.

Đặt $\sqrt{2x-1}=t \ge 0 \Rightarrow x=\dfrac{t^2+1}{2}$. Khi đó phương trình trở thành:

$$\left(\frac{t^2+1}{2}\right)^2-\frac{t^2+1}{2}+1-t=0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}\left(t^4-t^2+t-1\right)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}(t-1)^2\left(t^2+2t+3\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}(t-1)^2\left(t^2+2t+3\right)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\sqrt{2x-1}-1\right)^2\left(x+1+\sqrt{2x-1}\right)=0 \Leftrightarrow x=1.$$

Kết luận: Tập nghiệm của phương trình là $S=\{1\}$.

Đây chính là phương pháp ép tích bằng ẩn phụ.

Cách 5: Liên hợp ngược:

Điều kiện xác định: $x \ge \dfrac{1}{2}$.

Ta có: $x^2-x+1-\sqrt{2x-1}=0 \Leftrightarrow \left(x-\sqrt{2x-1}\right)+\left(x^2-2x+1\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(x-\sqrt{2x-1}\right)+\left(x-\sqrt{2x-1}\right)\left(x+\sqrt{2x-1}\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(x-\sqrt{2x-1}\right)\left(x+1+\sqrt{2x-1}\right)=0 \Leftrightarrow x=\sqrt{2x-1} \Leftrightarrow x=1$.

Kết luận: Tập nghiệm của phương trình là $S=\{1\}$.

III. Cách nhận diện và phương pháp giải bài toán nghiệm bội hữu tỷ:

Ví dụ: Giải phương trình trên tập số thực:
$x^2+5x=x\sqrt{3x-1}+(x+1)\sqrt{5x}$

1. Phương pháp nhận diện bằng TABLE:

Bước 1: Xét hàm số: $f(x)=x^2+5x-x\sqrt{3x-1}-(x+1)\sqrt{5x}$ Lựa chọn các giá trị: Start = 0.5, End = 9.5, Step = 0.5	f(X)=X²+5X−X√3X
Bước 2: Nhận bảng giá trị của TABLE: Ta thấy: Phương trình có vẻ như không có nghiệm bởi tất cả các giá trị đều mang dấu dương. Tuy nhiên, điều này có thể được lý giải như sau: • Với lựa chọn Start = 0.5, End = 9.5, Step = 0.5, TABLE sẽ chỉ hiển thị được các giá trị hoành độ hữu tỷ, còn các giá trị hoành độ vô tỷ không hiển thị được. • Nghiệm vô tỷ thì khi nhìn vào TABLE ta phải thấy hàm số có sự đổi dấu từ âm sang dương nhưng điều này không hề xuất hiện bởi nghiệm kép vô tỷ này sẽ khiến hàm số không thể đổi dấu khi đi qua trục hoành. Như vậy đây là dấu hiệu của **Nghiệm kép vô tỷ**, tuy nhiên, điều đó sẽ chỉ được khẳng định hoàn toàn nếu ta tìm được nghiệm của phương trình, mà điều này không quá khó khăn, ta có thể quay trở lại Mode 1 và dùng SOLVE.	X, F(X): 1: 0.0247; 1: 0.1136; 1.5: 0.0972; 0.5 2: 0.041; 2.5; 3: 0.0227; 1.856937244×10⁻³ 3.5: 0.1374; 4: 0.3728; 4.5; 0.7513067269 5: 1.2917; 5.5: 2.0101; 2.9207; 6 6.5: 4.0358; 7: 5.3664; 6.9222; 7.5
Bước 3: Quay trở lại Mode 1 và sử dụng SOLVE, ta tìm được: $x\approx 2.618033812$	X²+5X=X√3X−1+() X= 2.618033812 L−R= 0

2. Giải bài toán nghiệm bội hữu vô tỷ như thế nào?

Bước 4: Thay vào căn thức ta được: $\begin{cases}\sqrt{3x-1}\approx 2.618033887\approx x\\ \sqrt{5x}\approx 3.618033866\approx x+1\end{cases}$ Vậy ta có đánh giá $\begin{cases}x=\sqrt{3x-1}\\ x+1=\sqrt{5x}\end{cases}$.	√3X−1 2.618033887 / √5X 3.618033866

Cách 1: Tạo hằng đẳng thức:

Điều kiện xác định: $x\ge\frac{1}{3}$.

Ta có: $x^2+5x=x\sqrt{3x-1}+(x+1)\sqrt{5x}\Leftrightarrow x^2+5x-x\sqrt{3x-1}-(x+1)\sqrt{5x}=0$

$\Leftrightarrow 2x^2+10x-2x\sqrt{3x-1}-2(x+1)\sqrt{5x}=0$

$\Leftrightarrow\left(x^2-2x\sqrt{3x-1}+3x-1\right)+\left(x^2+2x+1-2(x+1)\sqrt{5x}+5x\right)=0$

$\Leftrightarrow\left(x-\sqrt{3x-1}\right)^2+\left(x+1-\sqrt{5x}\right)^2=0$

Vì vậy: $\begin{cases}x=\sqrt{3x-1}\\ x+1=\sqrt{5x}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\ge\frac{1}{3}\\ x^2-3x+1=0\end{cases}\Rightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$.

Kết luận: Tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}\right\}$.

Cách 2: Sử dụng đánh giá AM – GM:

Điều kiện xác định: $x\ge\frac{1}{3}$.

Ta có: $\begin{cases}x\sqrt{3x-1}\le\frac{x^2+3x-1}{2}\\ (x+1)\sqrt{5x}\le\frac{(x+1)^2+5x}{2}\end{cases}\Rightarrow x\sqrt{3x-1}+(x+1)\sqrt{5x}\le x^2+5x$.

Do đó $x^2+5x=x\sqrt{3x-1}+(x+1)\sqrt{5x}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\sqrt{3x-1}\\ x+1=\sqrt{5x}\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$.

Kết luận: Tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}\right\}$.

Cách 3: Ép tích bằng ẩn phụ:

Điều kiện xác định: $x\ge\frac{1}{3}$.

Đặt $\sqrt{5x}=t\ge 0\Rightarrow x=\frac{t^2}{5}$. Khi đó phương trình trở thành:

$\frac{t^4}{25}+t^2=\frac{t^2}{5}\sqrt{\frac{3t^2}{5}-1}+\left(\frac{t^2}{5}+1\right)t\Leftrightarrow t^4-5t^3+25t^2-25t-t^2\sqrt{15t^2-25}=0$

$\Leftrightarrow\left(t^2-5t\right)\left(t^2-5t+5\right)+t^2\left(5t-5-\sqrt{15t^2-25}\right)=0$

$\Leftrightarrow\left(t^2-5t\right)\left(10t^2-50t+50\right)+10t^2\left(5t-5-\sqrt{15t^2-25}\right)=0$

$\Leftrightarrow\left(5t-5-\sqrt{15t^2-25}\right)\left(\left(t^2-5t\right)\left(5t-5+\sqrt{15t^2-25}\right)+10t^2\right)=0$

$\Leftrightarrow\left(5t-5-\sqrt{15t^2-25}\right)\left(5t^3-20t^2+25t+\left(t^2-5t\right)\sqrt{15t^2-25}\right)=0$

$\Leftrightarrow\left(5t-5-\sqrt{15t^2-25}\right)\left(t\left(10t^2-50t+50\right)-\left(t^2-5t\right)\left(5t-5-\sqrt{15t^2-25}\right)\right)=0$

$\Leftrightarrow\left(5t-5-\sqrt{15t^2-25}\right)^2\left(t\left(5t-5+\sqrt{15t^2-25}\right)-t^2+5t\right)=0$

$\Leftrightarrow\left(5t-5-\sqrt{15t^2-25}\right)^2\left(4t^2+t\sqrt{15t^2-25}\right)=0$. Thay ngược $t=\sqrt{5x}$:

$\Leftrightarrow\left(5\sqrt{5x}-5-\sqrt{75x-25}\right)^2\left(20x+\sqrt{5x}\sqrt{75x-25}\right)=0$

$\Leftrightarrow\left(\sqrt{5x}-1-\sqrt{3x-1}\right)^2\left(4x+\sqrt{5x}\sqrt{3x-1}\right)=0$.

$\Leftrightarrow\sqrt{5x}=1+\sqrt{3x-1}$. Bình phương 2 vế: $5x=3x+2\sqrt{3x-1}\Leftrightarrow x=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$.

Kết luận: Tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}\right\}$.

IV. Bài tập áp dụng:

Bài 1: Giải phương trình trên tập số thực:
$x^2-x+2-2\sqrt{x}=0$

Phân tích

- Sử dụng TABLE kết hợp SOLVE ta được: $x=1$.
- Tính chất bội: Bội kép hữu tỷ $x=1$.
- Nhân tử tìm được: $\left(x+1-2\sqrt{x}\right)$.

Bài giải

Cách 1: Nhân liên hợp:

Điều kiện xác định: $x\geq 0$.

Ta có: $x^2-x+2-2\sqrt{x}=0\Leftrightarrow\left(x^2-2x+1\right)+\left(x+1-2\sqrt{x}\right)=0$

$\Leftrightarrow(x-1)^2+\dfrac{(x+1)^2-4x}{x+1+2\sqrt{x}}=0\Leftrightarrow(x-1)^2\left(1+\dfrac{1}{x+1+2\sqrt{x}}\right)=0$ (*)

Với $x\geq 0$ ta có: $1+\dfrac{1}{x+1+2\sqrt{x}}>0$ do đó (*) $\Rightarrow(x-1)^2=0\Leftrightarrow x=1$

Kết luận: Tập nghiệm của phương trình là $S=\{1\}$.

Cách 2: Liên hợp ngược:

Điều kiện xác định: $x\geq 0$.

Ta có: $x^2-x+2-2\sqrt{x}=0\Leftrightarrow\left(x^2-2x+1\right)+\left(x+1-2\sqrt{x}\right)=0$

$\Leftrightarrow\left(x+1-2\sqrt{x}\right)\left(x+1+2\sqrt{x}\right)+\left(x+1-2\sqrt{x}\right)=0$

$\Leftrightarrow\left(x+1-2\sqrt{x}\right)\left(x+2+2\sqrt{x}\right)=0\Leftrightarrow x+1=2\sqrt{x}\Leftrightarrow x=1$.

Kết luận: Tập nghiệm của phương trình là $S=\{1\}$.

Cách 3: Đặt ẩn phụ:

Điều kiện xác định: $x\geq 0$.

Đặt $\sqrt{x}=t\geq 0\Rightarrow x=t^2$. Phương trình trở thành: $t^4-t^2-2t+2=0$

$\Leftrightarrow(t-1)^2\left(t^2+2t+2\right)=0\Leftrightarrow\left(\sqrt{x}-1\right)^2\left(x+2+2\sqrt{x}\right)=0\Leftrightarrow x=1$.

Kết luận: Tập nghiệm của phương trình là $S=\{1\}$.

Cách 4: Tạo hằng đẳng thức:

Điều kiện xác định: $x\geq 0$.

Ta có: $x^2-x+2-2\sqrt{x}=0\Leftrightarrow\left(x^2-2x+1\right)+\left(x+1-2\sqrt{x}\right)=0$

$\Leftrightarrow(x-1)^2+\left(\sqrt{x}-1\right)^2=0\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ \sqrt{x}=1\end{cases}\Leftrightarrow x=1$.

Kết luận: Tập nghiệm của phương trình là $S=\{1\}$.

Cách 5: Sử dụng đánh giá AM – GM:

Điều kiện xác định: $x\geq 0$.

Theo bất đẳng thức AM – GM ta có: $\sqrt{x}.1\leq\frac{x+1}{2}\Leftrightarrow 2\sqrt{x}\leq x+1$.

Do đó: $x^2-x+2=2\sqrt{x}\leq x+1\Leftrightarrow(x-1)^2\leq 0$. Mà $(x-1)^2\geq 0,\forall x\geq 0$.

Do đó $(x-1)^2=0\Rightarrow x=1$ (Thỏa mãn điều kiện).

Kết luận: Tập nghiệm của phương trình là $S=\{1\}$.

Cách 6: Sử dụng khảo sát hàm số:

Điều kiện xác định: $x\geq 0$.

Nhận thấy $x=0$ không phải nghiệm của phương trình.

Xét hàm số: $f(x)=x^2-x+2-2\sqrt{x}$ với $x>0$.

Ta có: $f'(x)=2x-1-\frac{1}{\sqrt{x}}=2(x-1)+\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=\left(\sqrt{x}-1\right)\left(2\sqrt{x}+2+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$.

Vậy $f'(x)=0\Leftrightarrow x=1$. Lập bảng biến thiên ta có:

x	0	1	$+\infty$
$f(t)$	$+\infty$ ↘	0	↗ 2

Ta thấy phương trình $f(x)=0$ có duy nhất nghiệm $x=1$.

Kết luận: Tập nghiệm của phương trình là $S=\{1\}$.

Cách 7: Nâng lũy thừa:

Điều kiện xác định: $x \geq 0$.

Ta có: $x^2 - x + 2 = 2\sqrt{x}$. Bình phương 2 vế ta được:

$(x^2 - x + 2)^2 = 4x \Leftrightarrow (x^2 + 4)(x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Kết luận: Tập nghiệm của phương trình là $S = \{1\}$.

Bình luận

Trên đây là 7 kỹ năng tổng quát để giải một bài toán nghiệm bội: **Nhân liên hợp, Liên hợp ngược, Đặt ẩn phụ, Tạo hằng đẳng thức, Sử dụng đánh giá bằng bất đẳng thức, Khảo sát đồ thị hàm số, Nâng lũy thừa.**

Một bài toán có thể có rất nhiều cách giải, bạn đọc sẽ không dừng lại mà hãy tiếp tục phát triển các cách giải khác nhau, hoặc có thể kết hợp nhiều cách giải với nhau để có thể nâng cao kỹ năng giải toán phương trình, bất phương trình và hệ phương trình vô tỷ.

Riêng kỹ năng sử dụng đánh giá bằng bất đẳng thức, xin nhắc lại những bất đẳng thức, những đánh giá căn bản mà bạn đọc cần biết:

Tên đánh giá	Đánh giá
AM – GM 2 biến	$a+b \geq 2\sqrt{ab}$, $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$, $a^2+b^2 \geq 2ab$. Đẳng thức xảy ra: $a=b$.
AM – GM 3 biến	$a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}$, $abc \leq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3$, $a^3+b^3+c^3 \geq 3abc$. Đẳng thức xảy ra: $a=b=c$.
Cauchy – Schwarz 2 biến	$ax+by \leq \sqrt{(a^2+b^2)(x^2+y^2)}$. Đẳng thức xảy ra: $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}$.
Cauchy – Schwarz 3 biến	$ax+by+cz \leq \sqrt{(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)}$. Đẳng thức xảy ra: $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}$.
Cauchy – Schwarz phân thức 2 biến	$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y}$. Đẳng thức xảy ra: $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}$.
Cauchy – Schwarz phân thức 3 biến	$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$. Đẳng thức xảy ra: $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}$.

Bài 2: Giải phương trình trên tập số thực:
$2x+1=2\sqrt{x}+\sqrt{2x-1}$

Phân tích

- Sử dụng TABLE kết hợp SOLVE ta được: $x=1$.
- Tính chất bội: Bội kép hữu tỷ $x=1$.
- Nhân tử tìm được: $\left(x+1-2\sqrt{x}\right),\left(x-\sqrt{2x-1}\right)$.

Bài giải

Cách 1: Nhân liên hợp:

Điều kiện xác định: $x\geq\frac{1}{2}$.

Ta có: $2x+1=2\sqrt{x}+\sqrt{2x-1}\Leftrightarrow 2x+1-2\sqrt{x}-\sqrt{2x-1}=0$

$$\Leftrightarrow\left(x+1-2\sqrt{x}\right)+\left(x-\sqrt{2x-1}\right)=0\Leftrightarrow\frac{(x+1)^2-4x}{x+1+2\sqrt{x}}+\frac{x^2-(2x-1)}{x+\sqrt{2x-1}}=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{x^2-2x+1}{x+1+2\sqrt{x}}+\frac{x^2-2x+1}{x+\sqrt{2x-1}}=0\Leftrightarrow(x-1)^2\left(\frac{1}{x+1+2\sqrt{x}}+\frac{1}{x+\sqrt{2x-1}}\right)=0$$

Vì $x\geq\frac{1}{2}$ do đó $\frac{1}{x+1+2\sqrt{x}}+\frac{1}{x+\sqrt{2x-1}}>0$. Vậy $(x-1)^2=0\Leftrightarrow x=1$.

Kết luận: Tập nghiệm của phương trình là $S=\{1\}$.

Cách 2: Tạo hằng đẳng thức:

Điều kiện xác định: $x\geq\frac{1}{2}$.

Ta có: $2x+1=2\sqrt{x}+\sqrt{2x-1}\Leftrightarrow 2x+1-2\sqrt{x}-\sqrt{2x-1}=0$

$$\Leftrightarrow 4x+2-4\sqrt{x}-2\sqrt{2x-1}=0\Leftrightarrow 2\left(x-2\sqrt{x}+1\right)+\left(2x-1-2\sqrt{2x-1}+1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\sqrt{x}-1\right)^2+\left(\sqrt{2x-1}-1\right)^2=0\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{x}=1\\\sqrt{2x-1}=1\end{cases}\Leftrightarrow x=1$$

Kết luận: Tập nghiệm của phương trình là $S=\{1\}$.

Cách 3: Sử dụng bất đẳng thức AM – GM:

Điều kiện xác định: $x\geq\frac{1}{2}$.

Ta có: $2x+1=2\sqrt{x}+\sqrt{2x-1}$.

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM:

$$\begin{cases}2.\sqrt{x}.1\leq x+1\\\sqrt{2x-1}.1\leq\frac{2x-1+1}{2}=x\end{cases}\Rightarrow 2\sqrt{x}+\sqrt{2x-1}\leq 2x+1$$

Do đó $2x+1=2\sqrt{x}+\sqrt{2x-1}$ khi dấu bằng xảy ra: $\begin{cases}\sqrt{x}=1\\\sqrt{2x-1}=1\end{cases}\Leftrightarrow x=1$

Kết luận: Tập nghiệm của phương trình là $S=\{1\}$.

Bài 3: Giải phương trình trên tập số thực:
$\sqrt{9x^3-18x^2}+\sqrt{36x^2-9x^3}=x^2+9$

Phân tích

- Sử dụng TABLE kết hợp SOLVE ta được: $x=3$.
- Tính chất bội: Bội kép hữu tỷ $x=3$.
- Nhân tử tìm được: $\left(2\sqrt{x^3-2x^2}-(5x-9)\right),\left(2\sqrt{4x^2-x^3}-(9-x)\right)$.

Bài giải

Cách 1: Nhân liên hợp:

Điều kiện xác định: $D=\{0\}\cup[2;4]$.

Vì $x=0$ không phải nghiệm của phương trình do đó $2\le x\le 4$.

Ta có: $\sqrt{9x^3-18x^2}+\sqrt{36x^2-9x^3}=x^2+9 \Leftrightarrow 3\sqrt{x^3-2x^2}+3\sqrt{4x^2-x^3}=x^2+9$

$\Leftrightarrow 3\sqrt{x^3-2x^2}+3\sqrt{4x^2-x^3}-x^2-9=0 \Leftrightarrow 6\sqrt{x^3-2x^2}+6\sqrt{4x^2-x^3}-2x^2-18=0$

$\Leftrightarrow 3\left(2\sqrt{x^3-2x^2}-(5x-9)\right)+6\sqrt{4x^2-x^3}-2x^2+15x-45=0$

$\Leftrightarrow 3\left(2\sqrt{x^3-2x^2}-(5x-9)\right)+3\left(2\sqrt{4x^2-x^3}-(9-x)\right)-2x^2+12x-18=0$

$$\Leftrightarrow 3\frac{4x^3-33x^2+90x-81}{2\sqrt{x^3-2x^2}+5x-9}+3\frac{-4x^3+15x^2+18x-81}{2\sqrt{4x^2-x^3}+9-x}-2(x-3)^2=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3(x-3)^2(4x-9)}{2\sqrt{x^3-2x^2}+5x-9}-\frac{3(x-3)^2(4x+9)}{2\sqrt{4x^2-x^3}+9-x}-2(x-3)^2=0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)^2\left(\frac{3(4x-9)}{2\sqrt{x^3-2x^2}+5x-9}-\frac{3(4x+9)}{2\sqrt{4x^2-x^3}+9-x}-2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)^2\left(\frac{2x-9-4\sqrt{x^3-2x^2}}{2\sqrt{x^3-2x^2}+5x-9}-\frac{3(4x+9)}{2\sqrt{4x^2-x^3}+9-x}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow -(x-3)^2\left(\frac{9-2x+4\sqrt{x^3-2x^2}}{2\sqrt{x^3-2x^2}+5x-9}+\frac{3(4x+9)}{2\sqrt{4x^2-x^3}+9-x}\right)=0$$

Vì $2\le x\le 4$ nên $\begin{cases}9-2x>0\\5x-9>0\\9-x>0\end{cases} \Rightarrow \frac{9-2x+4\sqrt{x^3-2x^2}}{2\sqrt{x^3-2x^2}+5x-9}+\frac{3(4x+9)}{2\sqrt{4x^2-x^3}+9-x}>0$

Do đó: $(x-3)^2 \Rightarrow x=3$ (Thỏa mãn điều kiện).

Kết luận: Tập nghiệm của phương trình là $S=\{3\}$.

Cách 2: Tạo hằng đẳng thức:

Điều kiện xác định: $D=\{0\}\cup[2;4]$.

Vì $x=0$ không phải nghiệm của phương trình do đó $2\le x\le 4$.

Ta có: $\sqrt{9x^3-18x^2}+\sqrt{36x^2-9x^3}=x^2+9$

$\Leftrightarrow 18\sqrt{9x^3-18x^2}+18\sqrt{36x^2-9x^3}=18x^2+162$

$\Leftrightarrow 18x^2+162-18\sqrt{9x^3-18x^2}-18\sqrt{36x^2-9x^3}=0$

$\Leftrightarrow \left(9x^3-18x^2-2.9.\sqrt{9x^3-18x^2}+81\right)+\left(36x^2-9x^3-2.9.\sqrt{36x^2-9x^3}+81\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{9x^3-18x^2}-9\right)^2+\left(\sqrt{36x^2-9x^3}-9\right)^2=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{9x^3-18x^2}=9\\ \sqrt{36x^2-9x^3}=9\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-3)\left(9x^2+9x+27\right)=0\\ (x-3)\left(9x^2-9x-27\right)=0\end{cases} \Leftrightarrow x=3$

Kết luận: Tập nghiệm của phương trình là $S=\{3\}$.

Cách 3: Sử dụng bất đẳng thức AM – GM:

Điều kiện xác định: $D=\{0\}\cup[2;4]$.

Vì $x=0$ không phải nghiệm của phương trình do đó $2\le x\le 4$.

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có:

$\begin{cases}\sqrt{9x^3-18x^2}=x\sqrt{9x-18}\le \dfrac{x^2+9x-18}{2}\\ \sqrt{36x^2-9x^3}=x\sqrt{36-9x}\le \dfrac{x^2+36-9x}{2}\end{cases}$

Cộng hai vế của hai bất phương trình: $\sqrt{9x^3-18x^2}+\sqrt{36x^2-9x^3}\le x^2+9$

Do đó: $\sqrt{9x^3-18x^2}+\sqrt{36x^2-9x^3}=x^2+9$ khi đẳng thức xảy ra:

$\begin{cases}x=\sqrt{9x-18}\\ x=\sqrt{36-9x}\\ 2\le x\le 4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2-9x+18=0\\ x^2+9x-36=0\\ 2\le x\le 4\end{cases} \Leftrightarrow x=3$

Kết luận: Tập nghiệm của phương trình là $S=\{3\}$.

Bài 4: Giải phương trình trên tập số thực:

$\dfrac{3x+3}{\sqrt{x}}=4+\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}}$

Phân tích

- Sử dụng TABLE kết hợp SOLVE ta được: $x=1$.
- Tính chất bội: Bội kép hữu tỷ $x=1$.
- Nhân tử tìm được: $\left(2-\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}}\right);\left(\dfrac{3x+3}{\sqrt{x}}-6\right)$.

Bài giải

Cách 1: Nhân liên hợp:

Điều kiện xác định: $x>0$.

Ta có: $\dfrac{3x+3}{\sqrt{x}}=4+\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}} \Leftrightarrow \dfrac{3x+3}{\sqrt{x}}-6=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}}-2$

$\Leftrightarrow 3\left(\dfrac{x+1}{\sqrt{x}}-2\right)=\dfrac{x+1-2\sqrt{x^2-x+1}}{\sqrt{x^2-x+1}} \Leftrightarrow 3\left(\dfrac{x+1-2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)=\dfrac{x+1-2\sqrt{x^2-x+1}}{\sqrt{x^2-x+1}}$

$$\Leftrightarrow \frac{3\left(x^2-2x+1\right)}{\sqrt{x}\left(x+1+2\sqrt{x}\right)} = \frac{-3x^2+6x-3}{\sqrt{x^2-x+1}\left(x+1+2\sqrt{x^2-x+1}\right)}$$

$$\Leftrightarrow 3(x-1)^2\left(\frac{1}{\sqrt{x}\left(x+1+2\sqrt{x}\right)} + \frac{1}{\sqrt{x^2-x+1}\left(x+1+2\sqrt{x^2-x+1}\right)}\right) = 0$$

Do đó: $3(x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ (Thỏa mãn điều kiện).

Kết luận: Tập nghiệm của phương trình là $S = \{1\}$.

Cách 2: Sử dụng bất đẳng thức AM – GM:

Điều kiện xác định: $x > 0$. Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có:

$$\sqrt{x}.1 \le \frac{x+1}{2} \Leftrightarrow \frac{3x+3}{\sqrt{x}} \ge 6 \Leftrightarrow 4 + \frac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}} \ge 6 \Leftrightarrow \frac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}} \ge 2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \ge 2\sqrt{x^2-x+1} \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)^2 \ge 4\left(x^2-x+1\right) \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(x-1)^2 \le 0 \\ x > 0 \end{cases}$$

Vì $(x-1)^2 \ge 0 \forall x$ nên $3(x-1)^2 \le 0 \Rightarrow x = 1$ (Thỏa mãn điều kiện).

Kết luận: Tập nghiệm của phương trình là $S = \{1\}$.

Bài 5: Giải phương trình trên tập số thực:

$x^2 - 2(x+1)\sqrt{3x+1} = 2\sqrt{2x^2+5x+2} - 8x - 5$

Phân tích

- Sử dụng TABLE kết hợp SOLVE ta được: $x = 1$.
- Tính chất bội: Bội kép hữu tỷ $x = 1$.
- Nhân tử tìm được: $\left(3x+5-4\sqrt{3x+1}\right);\left(3x+3-2\sqrt{2x^2+5x+2}\right)$.

Bài giải

Cách 1: Nhân liên hợp:

Điều kiện xác định: $\begin{cases} 3x+1 \ge 0 \\ (x+2)(2x+1) \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \ge -\frac{1}{2}$.

Ta có: $x^2 - 2(x+1)\sqrt{3x+1} = 2\sqrt{2x^2+5x+2} - 8x - 5$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2(x+1)\sqrt{3x+1} - 2\sqrt{2x^2+5x+2} + 8x + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 4(x+1)\sqrt{3x+1} - 4\sqrt{2x^2+5x+2} + 16x + 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(3x+5-4\sqrt{3x+1}\right)(x+1) - x^2 + 8x + 5 - 4\sqrt{2x^2+5x+2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(3x+5-4\sqrt{3x+1}\right)(x+1) + 2\left(3x+3-2\sqrt{2x^2+5x+2}\right) - x^2 + 2x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)\frac{9(x-1)^2}{3x+5+4\sqrt{3x+1}} + 2\frac{(x-1)^2}{3x+3+2\sqrt{2x^2+5x+2}} - (x-1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2\left(\frac{9(x+1)}{3x+5+4\sqrt{3x+1}}+\frac{2}{3x+3+2\sqrt{2x^2+5x+2}}-1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2\left(\frac{6x+4-4\sqrt{3x+1}}{3x+5+4\sqrt{3x+1}}+\frac{2}{3x+3+2\sqrt{2x^2+5x+2}}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 2(x-1)^2\left(\frac{3x+2-2\sqrt{3x+1}}{3x+5+4\sqrt{3x+1}}+\frac{1}{3x+3+2\sqrt{2x^2+5x+2}}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 2(x-1)^2\left(\frac{(3x+1)-2\sqrt{3x+1}+1}{3x+5+4\sqrt{3x+1}}+\frac{1}{3x+3+2\sqrt{2x^2+5x+2}}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 2(x-1)^2\left(\frac{\left(\sqrt{3x+1}-1\right)^2}{3x+5+4\sqrt{3x+1}}+\frac{1}{3x+3+2\sqrt{2x^2+5x+2}}\right)=0 \Leftrightarrow x=1.$$

Kết luận: Tập nghiệm của phương trình là $S=\{1\}$.

Cách 2: Tạo hằng đẳng thức:

Điều kiện xác định: $\begin{cases}3x+1\ge 0\\(x+2)(2x+1)\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow x\ge -\frac{1}{2}$.

Ta có: $x^2-2(x+1)\sqrt{3x+1}=2\sqrt{2x^2+5x+2}-8x-5$

$\Leftrightarrow x^2+2x+1-2(x+1)\sqrt{3x+1}+3x+1=2\sqrt{(2x+1)(x+2)}-3x-3$

$\Leftrightarrow (x+1)^2-2(x+1)\sqrt{3x+1}+\left(\sqrt{3x+1}\right)^2+3x+3-2\sqrt{2x+1}\sqrt{x+2}=0$

$\Leftrightarrow \left(x+1-\sqrt{3x+1}\right)^2+2x+1-2\sqrt{2x+1}\sqrt{x+2}+x+2=0$

$\Leftrightarrow \left(x+1-\sqrt{3x+1}\right)^2+\left(\sqrt{2x+1}\right)^2-2\sqrt{2x+1}\sqrt{x+2}+\left(\sqrt{x+2}\right)^2=0$

$\Leftrightarrow \left(x+1-\sqrt{3x+1}\right)^2+\left(\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+2}\right)^2=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases}\left(x+1-\sqrt{3x+1}\right)^2=0\\\left(\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+2}\right)^2=0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x+1=\sqrt{3x+1}\\\sqrt{2x+1}=\sqrt{x+2}\end{cases}\Leftrightarrow x=1$

Kết luận: Tập nghiệm của phương trình là $S=\{1\}$.

Cách 3: Sử dụng bất đẳng thức AM – GM.

Điều kiện xác định: $\begin{cases}3x+1\ge 0\\(x+2)(2x+1)\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow x\ge -\frac{1}{2}$.

Ta có: $x^2-2(x+1)\sqrt{3x+1}=2\sqrt{2x^2+5x+2}-8x-5$

$\Leftrightarrow x^2+8x+5=2(x+1)\sqrt{3x+1}+2\sqrt{2x+1}\sqrt{x+2}$ (*)

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có:

$\begin{cases}2(x+1)\sqrt{3x+1}\le (x+1)^2+3x+1\\2\sqrt{2x+1}\sqrt{x+2}\le 2x+1+x+2\end{cases}\Rightarrow \begin{cases}2(x+1)\sqrt{3x+1}\le x^2+5x+2\\2\sqrt{2x+1}\sqrt{x+2}\le 3x+3\end{cases}$

Cộng hai vế của hai bất phương trình ta được:

$2(x+1)\sqrt{3x+1}+2\sqrt{2x+1}\sqrt{x+2}\le x^2+8x+5$ (**)

Kết hợp (*) và (**) ta có đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} x+1=\sqrt{3x+1} \\ \sqrt{2x+1}=\sqrt{x+2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)^2=3x+1 \\ 2x+1=x+2 \end{cases} \Leftrightarrow x=1$$

Kết luận: Tập nghiệm của phương trình là $S=\{1\}$.

Bài 6: Giải phương trình trên tập số thực:

$4x^2+12+\sqrt{x-1}=4\left(x\sqrt{5x-1}+\sqrt{9-5x}\right)$

Phân tích

- Sử dụng TABLE kết hợp SOLVE ta được: $x=1$.
- Tính chất bội: Nghiệm $x=1$ không phân biệt được tính chất bội bởi nghiệm trùng với điều kiện của phương trình (ta gọi là **Nghiệm biên**). Khi đó, ta loại bỏ căn thức nghiệm biên này trong TABLE và xét lại với hàm số: $f(x)=4x^2+12-4\left(x\sqrt{5x-1}+\sqrt{9-5x}\right)$, khi đó, $x=1$ sẽ bộc lộ bản chất là một nghiệm kép. Các bài toán nghiệm biên sau đó, bạn đọc cũng làm tương tự như trên.
- Nhân tử tìm được: $\left(5x+3-4\sqrt{5x-1}\right);\left(13-5x-4\sqrt{9-5x}\right)$.

Bài giải

Cách 1: Nhân liên hợp:

Điều kiện xác định: $1\le x\le\frac{9}{5}$.

Ta có: $4x^2+12-4x\sqrt{5x-1}-4\sqrt{9-5x}+\sqrt{x-1}=0$

$$\Leftrightarrow x\left(5x+3-4\sqrt{5x-1}\right)+\left(13-5x-4\sqrt{9-5x}\right)-x^2+2x-1+\sqrt{x-1}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{25x(x-1)^2}{5x+3+4\sqrt{5x-1}}+\frac{25(x-1)^2}{13-5x+4\sqrt{9-5x}}-(x-1)^2+\sqrt{x-1}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2\left(\frac{25x}{5x+3+4\sqrt{5x-1}}+\frac{25}{13-5x+4\sqrt{9-5x}}-1\right)+\sqrt{x-1}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2\left(\frac{20x-3-4\sqrt{5x-1}}{5x+3+4\sqrt{5x-1}}+\frac{25}{13-5x+4\sqrt{9-5x}}\right)^2+\sqrt{x-1}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2\left(\frac{\left(2\sqrt{5x-1}-1\right)^2}{5x+3+4\sqrt{5x-1}}+\frac{25}{13-5x+4\sqrt{9-5x}}\right)^2+\sqrt{x-1}=0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-1}\left(\frac{\left(\sqrt{x-1}\right)^3\left(2\sqrt{5x-1}-1\right)^2}{5x+3+4\sqrt{5x-1}}+\frac{25\left(\sqrt{x-1}\right)^3}{13-5x+4\sqrt{9-5x}}+1\right)^2=0 \Leftrightarrow x=1.$$

Kết luận: Tập nghiệm của phương trình là $S=\{1\}$.

Cách 2: Tạo hằng đẳng thức.

Điều kiện xác định: $1 \le x \le \frac{9}{5}$.

Ta có: $4x^2 + 12 + \sqrt{x-1} = 4\left(x\sqrt{5x-1} + \sqrt{9-5x}\right)$

$\Leftrightarrow 4x^2 + 12 + \sqrt{x-1} - 4x\sqrt{5x-1} - 4\sqrt{9-5x} = 0$

$\Leftrightarrow \left(4x^2 - 4x\sqrt{5x-1} + 5x - 1\right) + \left(9 - 5x - 4\sqrt{9-5x} + 4\right) + \sqrt{x-1} = 0$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-1} + \left(2x - \sqrt{5x-1}\right)^2 + \left(\sqrt{9-5x} - 2\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-1} = 0 \\ \left(2x - \sqrt{5x-1}\right)^2 = 0 \Rightarrow x = 1 \\ \left(\sqrt{9-5x} - 2\right)^2 = 0 \end{cases}$$

Kết luận: Tập nghiệm của phương trình là $S = \{1\}$.

Cách 3: Sử dụng bất đẳng thức AM – GM.

Điều kiện xác định: $1 \le x \le \frac{9}{5}$.

Ta có: $4x^2 + 12 + \sqrt{x-1} = 4\left(x\sqrt{5x-1} + \sqrt{9-5x}\right)$

$\Leftrightarrow 4x^2 + 12 + \sqrt{x-1} = 4x\sqrt{5x-1} + 4\sqrt{9-5x} = 0$ (*)

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM: $\begin{cases} 4x\sqrt{5x-1} = 2.2x.\sqrt{5x-1} \le 4x^2 + 5x - 1 \\ 4\sqrt{9-5x} = 2.2.\sqrt{9-5x} \le 4 + 9 - 5x \end{cases}$

Cộng hai vế của hai bất phương trình: $4x\sqrt{5x-1} + 4\sqrt{9-5x} \le 4x^2 + 12$ (**)

Kết hợp (*) và (**) ta được: $\sqrt{x-1} \le 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Kết luận: Tập nghiệm của phương trình là $S = \{1\}$.

Bài 7: Giải phương trình trên tập số thực:

$x^2 - 8x + 10 + \frac{81}{x + 2\sqrt{x-1}} = 2\sqrt{x-1}$

Phân tích

- Sử dụng TABLE kết hợp SOLVE ta được: $x = 5$.
- Tính chất bội: Bội kép hữu tỷ $x = 5$.
- Nhân tử tìm được: $\left(x + 3 - 4\sqrt{x-1}\right)$.

Bài giải

Điều kiện xác định: $x \ge 1$.

Ta có: $x^2 - 8x + 10 + \frac{81}{x + 2\sqrt{x-1}} = 2\sqrt{x-1}$

$\Leftrightarrow \left(x^2 - 10x + 25\right) + 2x - 2\sqrt{x-1} - 15 + \frac{81}{x + 2\sqrt{x-1}} = 0$

$\Leftrightarrow (x-5)^2 + \frac{\left(2x - 2\sqrt{x-1} - 15\right)\left(x + 2\sqrt{x-1}\right) + 81}{x + 2\sqrt{x-1}} = 0$

$\Leftrightarrow (x-5)^2 + \frac{2x^2 - 19x + 85 + (2x - 30)\sqrt{x-1}}{x + 2\sqrt{x-1}} = 0$

$$\Leftrightarrow 2(x-5)^2+\frac{4x^2-38x+170+4(x-15)\sqrt{x-1}}{x+2\sqrt{x-1}}=0$$

$$\Leftrightarrow 2(x-5)^2+\frac{5x^2-50x+125-(x-15)\left(x+3-4\sqrt{x-1}\right)}{x+2\sqrt{x-1}}=0$$

$$\Leftrightarrow 2(x-5)^2+\frac{1}{x+2\sqrt{x-1}}\left(5(x-5)^2-\frac{(x-15)(x-5)^2}{x+3+4\sqrt{x-1}}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-5)^2\left[2+\frac{1}{x+2\sqrt{x-1}}\left(5-\frac{(x-15)}{x+3+4\sqrt{x-1}}\right)\right]=0$$

$$\Leftrightarrow (x-5)^2\left[2+\frac{1}{x+2\sqrt{x-1}}\left(\frac{4x+30+20\sqrt{x-1}}{x+3+4\sqrt{x-1}}\right)\right]=0 \Leftrightarrow x=5.$$

Kết luận: Tập nghiệm của phương trình là $S=\{5\}$.

Bài 8: Giải bất phương trình trên tập số thực:

$$x^4+\sqrt{x^2-x+1}+\frac{1}{\sqrt{1-x}}\le\frac{1}{\sqrt{x^2-x+1}}+\sqrt{1-x}$$

Phân tích

- Sử dụng TABLE kết hợp SOLVE ta được: $x=0$.
- Tính chất bội: Bội kép hữu tỷ $x=0$.
- Nhân tử tìm được: $\left(-\frac{1}{2}x+1-\sqrt{x^2-x+1}\right);\left(-\frac{1}{2}x+1-\sqrt{1-x}\right)$.
- Hoặc có thể sử dụng: $\sqrt{x^2-x+1}-\sqrt{1-x}$.

Bài giải

Điều kiện xác định: $x\le 1$.

Ta có: $x^4+\sqrt{x^2-x+1}+\frac{1}{\sqrt{1-x}}\le\frac{1}{\sqrt{x^2-x+1}}+\sqrt{1-x}$

$$\Leftrightarrow x^4+\left(\sqrt{x^2-x+1}-\sqrt{1-x}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}}-\frac{1}{\sqrt{x^2-x+1}}\right)\le 0$$

$$\Leftrightarrow x^4+\left(\sqrt{x^2-x+1}-\sqrt{1-x}\right)+\frac{\sqrt{x^2-x+1}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}\sqrt{x^2-x+1}}\le 0$$

$$\Leftrightarrow x^4+\left(\sqrt{x^2-x+1}-\sqrt{1-x}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{1-x}\sqrt{x^2-x+1}}\right)\le 0$$

$$\Leftrightarrow x^4+\frac{x^2}{\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{1-x}}\frac{\sqrt{1-x}\sqrt{x^2-x+1}+1}{\sqrt{1-x}\sqrt{x^2-x+1}}\le 0$$

$$\Leftrightarrow x^2\left(1+\frac{\sqrt{1-x}\sqrt{x^2-x+1}+1}{\left(\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{1-x}\right)\sqrt{1-x}\sqrt{x^2-x+1}}\right)\le 0\Leftrightarrow x^2\le 0\Leftrightarrow x=0.$$

Kết luận: Tập nghiệm của bất phương trình là $S=\{0\}$.

Bài 9: Giải phương trình trên tập số thực:

$\frac{1}{2-x}+\frac{1}{2+x}=\frac{2}{1+\sqrt{1-x^2}}$

Cách 1: Biến đổi tương đương:

Điều kiện xác định: $-1\le x\le 1$.

Ta có phương trình: $\frac{1}{2-x}+\frac{1}{2+x}=\frac{2}{1+\sqrt{1-x^2}}$

$\Leftrightarrow \frac{4}{4-x^2}=\frac{2}{1+\sqrt{1-x^2}}\Leftrightarrow 4\sqrt{1-x^2}=4-2x^2\Leftrightarrow 2-x^2-2\sqrt{1-x^2}=0$

$\Leftrightarrow 1-x^2-2\sqrt{1-x^2}+1=0\Leftrightarrow\left(\sqrt{1-x^2}-1\right)^2=0$

$\Leftrightarrow \sqrt{1-x^2}=1\Leftrightarrow x=0$ (Thỏa mãn điều kiện xác định).

Kết luận: Tập nghiệm của phương trình là $S=\{0\}$.

Cách 2: Đặt ẩn phụ:

Điều kiện xác định: $-1\le x\le 1$.

Đặt: $\sqrt{1-x}=a\Rightarrow 1-x=a^2$ và $\sqrt{1+x}=b\Rightarrow 1+x=b^2$ $(a,b\ge 0)$.

Do đó phương trình: $\frac{1}{2-x}+\frac{1}{2+x}=\frac{2}{1+\sqrt{1-x^2}}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{1+(1-x)}+\frac{1}{1+(1+x)}=\frac{2}{1+\sqrt{1-x^2}}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2}=\frac{2}{1+ab}\Leftrightarrow \frac{2+a^2+b^2}{(1+a^2)(1+b^2)}=\frac{2}{1+ab}$

$\Leftrightarrow ab\left(a^2-2ab+b^2\right)-\left(a^2-2ab+b^2\right)=0\Leftrightarrow (a-b)^2(ab-1)=0$

$\Leftrightarrow\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)^2\left(\sqrt{1-x^2}-1\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{1+x}=\sqrt{1-x}\\ \sqrt{1-x^2}=1\end{array}\right.\Leftrightarrow x=0$.

Kết luận: Tập nghiệm của phương trình là $S=\{0\}$.

Bài 10: Giải phương trình trên tập số thực:

$\frac{x^2}{\sqrt{x+1}}+\frac{x+1}{x}=x+\sqrt{x+1}$

Cách 1: Biến đổi tương đương:

Điều kiện xác định: $x>-1, x\neq 0$.

Ta có phương trình: $\frac{x^2}{\sqrt{x+1}}+\frac{x+1}{x}=x+\sqrt{x+1}$

$\Leftrightarrow \frac{x^3+(x+1)\sqrt{x+1}}{x\sqrt{x+1}}=x+\sqrt{x+1}\Leftrightarrow x^3+(x+1)\sqrt{x+1}=x^2\sqrt{x+1}+x^2+x$

$\Leftrightarrow x^3-x^2-x+(x+1)\sqrt{x+1}-x^2\sqrt{x+1}=0\Leftrightarrow x^3-x^2-x-\left(x^2-x-1\right)\sqrt{x+1}=0$

$\Leftrightarrow x\left(x^2-x-1\right)-\left(x^2-x-1\right)\sqrt{x+1}=0$

$\Leftrightarrow \left(x^2-x-1\right)\left(x-\sqrt{x+1}\right)=0 \Leftrightarrow \left(x-\sqrt{x+1}\right)^2\left(x+\sqrt{x+1}\right)=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

Kết luận: Phương trình có tập nghiệm: $S=\left\{\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right\}$.

Cách 2: Đặt ẩn phụ:

Điều kiện xác định: $x>-1, x\neq 0$.

Đặt: $\sqrt{x+1}=a \Rightarrow x+1=a^2\ (a>0)$ và $x=b\Rightarrow x^2=b^2$

Do đó phương trình: $\dfrac{x^2}{\sqrt{x+1}}+\dfrac{x+1}{x}=x+\sqrt{x+1}$

$\dfrac{a^2}{b}+\dfrac{b^2}{a}=a+b \Leftrightarrow a^3+b^3=ab(a+b) \Leftrightarrow (a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)=ab(a+b)$

$\Leftrightarrow (a-b)^2(a+b)=0 \Leftrightarrow \left(x-\sqrt{x+1}\right)^2\left(x+\sqrt{x+1}\right)=0 \Leftrightarrow \left(x^2-x-1\right)\left(x-\sqrt{x+1}\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-x-1=0 \\ x=\sqrt{x+1}\end{array}\right. \Leftrightarrow x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ (thỏa mãn điều kiện xác định)

Kết luận: Phương trình có tập nghiệm: $S=\left\{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2};\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right\}$.

Bài 11: Giải phương trình trên tập số thực:

$x^2+3x+2=x\sqrt{2x}+x\sqrt{x+2}+\sqrt{2x^2+4x}$

Cách 1: Nhân liên hợp:

Điều kiện xác định: $x\geq 0$.

Ta có phương trình: $x^2+3x+2=x\sqrt{2x}+x\sqrt{x+2}+\sqrt{2x^2+4x}$

$\Leftrightarrow x\left(\dfrac{1}{2}x+1-\sqrt{2x}\right)+x\left(\dfrac{1}{4}x+\dfrac{3}{2}-\sqrt{x+2}\right)+\left(\dfrac{3}{2}x+1-\sqrt{2x^2+4x}\right)+\dfrac{1}{4}x^2-x+1=0$

$\Leftrightarrow x.\dfrac{\frac{1}{4}x^2-x+1}{\frac{1}{2}x+1+\sqrt{2x}}+x.\dfrac{\frac{1}{16}x^2-\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}x+\frac{3}{2}+\sqrt{x+2}}+\dfrac{\frac{1}{4}x^2-x+1}{\frac{3}{2}x+1+\sqrt{2x^2+4x}}+\dfrac{1}{4}x^2-x+1=0$

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{1}{4}x^2-x+1\right)\left[\dfrac{x}{\frac{1}{2}x+1+\sqrt{2x}}+\dfrac{\frac{1}{4}x}{\frac{1}{4}x+\frac{3}{2}+\sqrt{x+2}}+\dfrac{1}{\frac{3}{2}x+1+\sqrt{2x^2+4x}}+1\right]=0$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{4}(x-2)^2\left[\dfrac{2x}{x+2+2\sqrt{2x}}+\dfrac{x}{x+6+4\sqrt{x+2}}+\dfrac{2}{3x+2+2\sqrt{2x^2+4x}}+1\right]=0\ (*)$

Do $x\geq 0$ nên $\dfrac{2x}{x+2+2\sqrt{2x}}+\dfrac{x}{x+6+4\sqrt{x+2}}+\dfrac{2}{3x+2+2\sqrt{2x^2+4x}}+1>0$ do đó (*)

$\Leftrightarrow (x-2)^2=0 \Leftrightarrow x=2$ (thỏa mãn điều kiện xác định).

Kết luận: Phương trình có tập nghiệm: $S=\{2\}$.

Cách 2: Biến đổi về hằng đẳng thức:

Điều kiện xác định: $x \geq 0$.

Ta có phương trình: $x^2 + 3x + 2 = x\sqrt{2x} + x\sqrt{x+2} + \sqrt{2x^2 + 4x}$

$\Leftrightarrow 2x^2 + 6x + 4 = 2x\sqrt{2x} + 2x\sqrt{x+2} + 2\sqrt{2x^2 + 4x}$

$\Leftrightarrow 2x^2 + 6x + 4 - 2x\sqrt{2x} - 2x\sqrt{x+2} - 2\sqrt{2x(x+2)} = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x\sqrt{2x} + 2x + x^2 - 2x\sqrt{x+2} + (x+2) + 2x - 2\sqrt{2x(x+2)} + (x+2) = 0$

$\Leftrightarrow \left(x - \sqrt{2x}\right)^2 + \left(x - \sqrt{x+2}\right)^2 + \left(\sqrt{2x} - \sqrt{x+2}\right)^2 = 0$

$\Leftrightarrow x - \sqrt{2x} = 0; x - \sqrt{x+2} = 0; \sqrt{2x} - \sqrt{x+2} = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

Kết luận: Phương trình có tập nghiệm: $S = \{2\}$.

Cách 3: Sử dụng bất đẳng thức AM-GM

Điều kiện xác định: $x \geq 0$.

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM: $\begin{cases} x\sqrt{2x} \leq \dfrac{x^2 + 2x}{2} (1) \\ x\sqrt{x+2} \leq \dfrac{x^2 + x + 2}{2} (2) \\ \sqrt{2x^2 + 4x} = \sqrt{2x(x+2)} \leq \dfrac{2x + x + 2}{2} (3) \end{cases}$

Cộng vế với vế của 3 bất đẳng thức trên ta có:

$\Leftrightarrow x\sqrt{2x} + x\sqrt{x+2} + \sqrt{2x^2 + 4x} \leq \dfrac{x^2 + 2x + x^2 + x + 2 + 2x + x + 2}{2} = x^2 + 3x + 2$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: $x = \sqrt{2x} = \sqrt{x+2} \Leftrightarrow x = 2$.

Kết luận: Phương trình có tập nghiệm: $S = \{2\}$.

Bài 12: Giải phương trình trên tập số thực:

$$\frac{x^3 + (3x-1)\sqrt{2x-1}}{x + 1 + \sqrt{2x-1}} = x\sqrt{2x-1}$$

Điều kiện xác định: $x \geq \dfrac{1}{2}$.

Ta có phương trình: $\dfrac{x^3 + (3x-1)\sqrt{2x-1}}{x + 1 + \sqrt{2x-1}} = x\sqrt{2x-1}$

$\Leftrightarrow x^3 + (3x-1)\sqrt{2x-1} = x\sqrt{2x-1}\left(x + 1 + \sqrt{2x-1}\right)$

$\Leftrightarrow x^3 + (3x-1)\sqrt{2x-1} = (x^2 + x)\sqrt{2x-1} + 2x^2 - x \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 + x - (x^2 - 2x + 1)\sqrt{2x-1} = 0$

$\Leftrightarrow x(x^2 - 2x + 1) - (x^2 - 2x + 1)\sqrt{2x-1} = 0 \Leftrightarrow x(x-1)^2 - (x-1)^2\sqrt{2x-1} = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2\left(x - \sqrt{2x-1}\right) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{(x-1)^4}{x + \sqrt{2x-1}} = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Kết luận: Phương trình có tập nghiệm: $S = \{1\}$.

Chú ý: Qua bài toán ta nhận thấy thực chất bài toán này có nghiệm bội 4 nhưng khi kiểm tra điều kiện nghiệm kép bài toán vẫn đúng vì bản chất của nghiệm bội bốn là nghiệm kép. Nếu chúng ta đạo hàm 2 lần thì sẽ rất phức tạp để kiểm tra hết yếu tố. Do đó khi gặp phải những bài toán như thế này tốt nhất chúng ta hãy cứ xử lý như một bài toán có chứa nghiệm kép như trên.

Bài 13: Giải phương trình trong tập số thực:
$x^4+x^2+6x+9=\left(x^3+x^2+3x\right)\sqrt{x+3}$

Cách 1: Liên hợp ngược:

Điều kiện xác định: $x\geq -3$.

Ta có phương trình: $x^4+x^2+6x+9=\left(x^3+x^2+3x\right)\sqrt{x+3}$

$\Leftrightarrow x^4+x^2+6x+9-\left(x^3+x^2+3x\right)\sqrt{x+3}=0$

$\Leftrightarrow \left(x^3+x^2+3x\right)\left(x-\sqrt{x+3}\right)+x^4+x^2+6x+9-x^4-x^3-3x^2=0$

$\Leftrightarrow -x^3-2x^2+6x+9+\left(x^3+x^2+3x\right)\left(x-\sqrt{x+3}\right)=0$

$\Leftrightarrow -\left(x+3\right)\left(x^2-x-3\right)+\left(x^3+x^2+3x\right)\left(x-\sqrt{x+3}\right)=0$

$\Leftrightarrow -\left(x+3\right)\left(x-\sqrt{x+3}\right)\left(x+\sqrt{x+3}\right)+\left(x^3+x^2+3x\right)\left(x-\sqrt{x+3}\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(x-\sqrt{x+3}\right)\left(x^3-\left(x+3\right)\sqrt{x+3}\right)=0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(x-\sqrt{x+3}\right)^2\left(x^2+\left(x+\sqrt{x+3}\right)^2+\left(\sqrt{x+3}\right)^2\right)=0 \Leftrightarrow x=\frac{1+\sqrt{13}}{2}$.

Kết luận: Phương trình có tập nghiệm: $S=\left\{\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right\}$.

Cách 2: Đặt ẩn phụ:

Điều kiện xác định: $x\geq -3$.

Ta biến đổi phương trình: $x^4+x^2+6x+9=\left(x^3+x^2+3x\right)\sqrt{x+3}$

$\Leftrightarrow x^4+\left(x^2+6x+9\right)=x^3\sqrt{x+3}+\left(x^2+3x\right)\sqrt{x+3}$

$\Leftrightarrow x^4+\left(x+3\right)^2=x^3\sqrt{x+3}+x\left(x+3\right)\sqrt{x+3} \Leftrightarrow x^4+\left(\sqrt{x+3}\right)^4=x^3\sqrt{x+3}+x\left(\sqrt{x+3}\right)^3$

Đặt: $a=x\Leftrightarrow x^4=a^4$ và $\sqrt{x+3}=b$ thay vào phương trình ta có:

$\Leftrightarrow a^4+b^4=a^3b+ab^3 \Leftrightarrow a^4+b^4-a^3b-ab^3 \Leftrightarrow a^3\left(a-b\right)-b^3\left(a-b\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(a-b\right)\left(a^3-b^3\right)=0 \Leftrightarrow \left(a-b\right)^2\left(a^2+ab+b^2\right)=0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(x-\sqrt{x+3}\right)^2\left(x^2+\left(x+\sqrt{x+3}\right)^2+\left(\sqrt{x+3}\right)^2\right)=0 \Leftrightarrow x=\frac{1+\sqrt{13}}{2}$.

Kết luận: Phương trình có tập nghiệm: $S=\left\{\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right\}$.

Bài 14: Giải phương trình trong tập số thực:
$\left(x^3+4x+1\right)\sqrt{2x-1}=x^3+4x^2+2x-1$

Cách 1: Nhân liên hợp:

Điều kiện xác định: $x\ge\frac{1}{2}$.

Ta có phương trình: $\left(x^3+4x+1\right)\sqrt{2x-1}=x^3+4x^2+2x-1$

$\Leftrightarrow x^3+4x^2+2x-1-\left(x^3+4x+1\right)\sqrt{2x-1}=0$

$\Leftrightarrow -x^4+x^3+x-1+\left(x^3+4x+1\right)\left(x-\sqrt{2x-1}\right)=0$

$\Leftrightarrow -\left(x^2+x+1\right)\left(x-1\right)^2+\dfrac{\left(x^3+4x+1\right)\left(x^2-2x+1\right)}{x+\sqrt{2x-1}}=0$

$\Leftrightarrow \left(x-1\right)^2\left(-\left(x^2+x+1\right)+\dfrac{x^3+4x+1}{x+\sqrt{2x-1}}\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(x-1\right)^2\left(x^2-3x-1+\left(x^2+x+1\right)\sqrt{2x-1}\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(x-1\right)^2\left(\left(x^2+x+1\right)\left(\sqrt{2x-1}-1\right)+2x^2-2x\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(x-1\right)^2\left(2x-2\right)\left(\dfrac{x^2+x+2}{\sqrt{2x-1}+1}+x\right)=0\Leftrightarrow 2\left(x-1\right)^3\left(\dfrac{x^2+x+2}{\sqrt{2x-1}+1}+x\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(x-1\right)^3=0\Leftrightarrow x=1$ (thỏa mãn điều kiện xác định).

Kết luận: Phương trình có tập nghiệm: $S=\{1\}$.

Cách 2: Phân tích nhân tử:

Điều kiện xác định: $x\ge\frac{1}{2}$.

Ta có phương trình: $\left(x^3+4x+1\right)\sqrt{2x-1}=x^3+4x^2+2x-1$

$\Leftrightarrow \left(x^3+2x\right)\sqrt{2x-1}+\left(2x+1\right)\sqrt{2x-1}=\left(x^3+2x\right)+\left(2x-1\right)\left(2x+1\right)$

$\Leftrightarrow \left(x^3+2x\right)\sqrt{2x-1}+\left(2x+1\right)\sqrt{2x-1}-\left(x^3+2x\right)-\left(2x-1\right)\left(2x+1\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(x^3+2x\right)\left(\sqrt{2x-1}-1\right)-\left(2x+1\right)\sqrt{2x-1}\left(\sqrt{2x-1}-1\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{2x-1}-1\right)\left(x^3+2x-\left(2x+1\right)\sqrt{2x-1}\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{2x-1}-1\right)\left(x^3-\left(2x-1\right)\sqrt{2x-1}+2x-2\sqrt{2x-1}\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{2x-1}-1\right)\left[\left(x-\sqrt{2x-1}\right)\left(x^2+x\sqrt{2x-1}+2x-1\right)+2\left(x-\sqrt{2x-1}\right)\right]=0$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{2x-1}-1\right)\left(x-\sqrt{2x-1}\right)\left(x^2+x\sqrt{2x-1}+2x+1\right)=0$ (*)

Do: $x^2+x\sqrt{2x-1}+2x+1=\left(x+1\right)^2+x\sqrt{2x-1}>0\forall x\ge\frac{1}{2}$ nên phương trình(*)

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{2x-1}-1=0\\ x-\sqrt{2x-1}=0\end{array}\right.\Leftrightarrow x=1$ (thỏa mãn điều kiện xác định).

Kết luận: Phương trình có tập nghiệm: $S=\{1\}$.

Bài 15: Giải phương trình trong tập số thực:

$$\sqrt[4]{\frac{x^4}{x-2}}=\sqrt[4]{x-2}+2$$

Cách 1: Tạo hằng đẳng thức:

Điều kiện xác định: $x>2$.

Ta có phương trình: $\sqrt[4]{\frac{x^4}{x-2}}=\sqrt[4]{x-2}+2$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt[4]{x-2}}=\sqrt[4]{x-2}+2 \Leftrightarrow x=\sqrt{x-2}+2\sqrt[4]{x-2}$$

$$\Leftrightarrow x-\sqrt{x-2}-2\sqrt[4]{x-2}=0 \Leftrightarrow \sqrt{x-2}-2\sqrt[4]{x-2}+1+x-2\sqrt{x-2}-1=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt[4]{x-2}-1\right)^2+x-2-2\sqrt{x-2}+1=0 \Leftrightarrow \left(\sqrt[4]{x-2}-1\right)^2+\left(\sqrt{x-2}-1\right)^2=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt[4]{x-2}-1=0\\ \sqrt{x-2}-1=0\end{cases} \Leftrightarrow x=3 \text{ (thỏa mãn điều kiện xác định)}$$

Kết luận: Phương trình có tập nghiệm: $S=\{3\}$.

Cách 2: Phân tích nhân tử sử dụng đặt ẩn phụ:

Điều kiện xác định: $x>2$.

Đặt: $\sqrt[4]{x-2}=t \Rightarrow x=t^4+2$

Do đó phương trình: $\sqrt[4]{\frac{x^4}{x-2}}=\sqrt[4]{x-2}+2$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt[4]{x-2}}=\sqrt[4]{x-2}+2 \Leftrightarrow x=\sqrt{x-2}+2\sqrt[4]{x-2}$$

$$\Leftrightarrow t^4+2-t^2-2t=0 \Leftrightarrow \left(t^2+2t+2\right)\left(t-1\right)^2=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x-2}+2\sqrt[4]{x-2}+2\right)\left(\sqrt[4]{x-2}-1\right)^2=0 \Leftrightarrow \left(\sqrt[4]{x-2}-1\right)^2=0 \Leftrightarrow x=3.$$

Kết luận: Phương trình có tập nghiệm: $S=\{3\}$.

Bài 16: Giải bất phương trình trong tập số thực:

$$\frac{x+2}{\sqrt{2\left(x^4-x^2+1\right)}-1}\ge\frac{1}{x-1}$$

Điều kiện xác định: $x\neq 1$.

Do $\sqrt{2\left(x^4-x^2+1\right)}=\sqrt{2\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{2}}>1, \forall x$ nên:

$$\frac{x+2}{\sqrt{2\left(x^4-x^2+1\right)}-1}\ge\frac{1}{x-1} \Leftrightarrow x+2\ge\frac{\sqrt{2\left(x^4-x^2+1\right)}-1}{x-1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x-1}\left(x^2+x-1-\sqrt{2\left(x^4-x^2+1\right)}\right)\ge 0$$

Trường hợp 1: $x>1$ khi đó ta có:

$$\Leftrightarrow x^2+x-1-\sqrt{2\left(x^4-x^2+1\right)}\ge 0\Leftrightarrow \sqrt{2\left(x^4-x^2+1\right)}-2x-x^2+x+1\le 0$$

$$\Leftrightarrow x^2+x-1\ge\sqrt{2\left(x^4-x^2+1\right)}\Leftrightarrow\begin{cases}x>1\\ \left(x^2+x-1\right)^2\ge 2\left(x^4-x^2+1\right)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x>1\\ x^4-2x^3-x^2+2x+1\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>1\\ \left(x^2-x-1\right)^2\le 0\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Trường hợp 2: $x<1$ khi đó ta có:

$$\Leftrightarrow x^2+x-1-\sqrt{2\left(x^4-x^2+1\right)}\le 0\Leftrightarrow x^2+x-1\le\sqrt{2\left(x^4-x^2+1\right)}$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2+x-1<0,x<1\\ x^2+x-1\ge 0,x<1;\left(x^2-x-1\right)^2\ge 0\end{array}\right.\Leftrightarrow x<1$$

Kết luận: Tập nghiệm của bất phương trình là $S=(-\infty;1)\cup\left\{\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

Bài 17: Giải phương trình trong tập số thực:

$$\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2x-1}}{x^2+1}=\frac{x^2+2x-1}{2x\sqrt{2x-1}}$$

Cách 1: Nhân liên hợp:

Điều kiện xác định: $x>\frac{1}{2}$.

Ta có: $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2x-1}}{x^2+1}=\frac{x^2+2x-1}{2x\sqrt{2x-1}}\Leftrightarrow\frac{x^2+1+2\sqrt{2x-1}}{2\left(x^2+1\right)}=\frac{x^2+2x-1}{2x\sqrt{2x-1}}$

$$\Leftrightarrow\left(2x^3+2x\right)\sqrt{2x-1}+4x(2x-1)=\left(2x^2+2\right)\left(x^2+2x-1\right)$$

$$\Leftrightarrow\left(2x^3+2x\right)\sqrt{2x-1}+8x^2-4x=2x^4+4x^3-2x^2+2x^2+4x-2$$

$$\Leftrightarrow\left(2x^3+2x\right)\sqrt{2x-1}=2x^4+4x^3-8x^2+8x-2$$

$$\Leftrightarrow 2x^4+4x^3-8x^2+8x-2-\left(2x^3+2x\right)\sqrt{2x-1}=0$$

$$\Leftrightarrow\left(2x^3+2x\right)\left(x-\sqrt{2x-1}\right)+4x^3-10x^2+8x-2=0$$

$$\Leftrightarrow\left(2x^3+2x\right)\frac{x^2-2x+1}{x+\sqrt{2x-1}}+(x-1)^2(4x-2)=0$$

$$\Leftrightarrow(x-1)^2\left[\frac{2x^3+2x}{x+\sqrt{2x-1}}+(4x-2)\right]=0\Leftrightarrow(x-1)^2=0\Leftrightarrow x=1.$$

Kết luận: Tập nghiệm của phương trình là $S=\{1\}$.

Cách 2: Dùng bất đẳng thức AM-GM:

Điều kiện xác định: $x>\frac{1}{2}$.

Ta có phương trình: $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2x-1}}{x^2+1}=\frac{x^2+2x-1}{2x\sqrt{2x-1}}$

$\Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{2x-1}^2+1}+\frac{\sqrt{2x-1}}{x^2+1}=\frac{x^2+\sqrt{2x-1}^2}{2x\sqrt{2x-1}}$

Đặt: $a=x;b=\sqrt{2x-1}\ (a,b>0)$. Phương trình trở thành:

$\frac{a}{b^2+1}+\frac{b}{a^2+1}=\frac{a^2+b^2}{2ab}\Leftrightarrow \frac{a}{b^2+1}+\frac{b}{a^2+1}=\frac{a}{2b}+\frac{b}{2a}$.

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$\begin{cases} b^2+1\ge 2b \\ a^2+1\ge 2a \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{b^2+1}\le \frac{a}{2b} \\ \frac{b}{a^2+1}\le \frac{b}{2a} \end{cases}$ do đó $\frac{a}{b^2+1}+\frac{b}{a^2+1}\le \frac{a}{2b}+\frac{b}{2a}$

Dấu bằng xảy ra khi: $a=1;b=1\Leftrightarrow x=\sqrt{2x-1}=1\Leftrightarrow x=1$.

Kết luận: Tập nghiệm của phương trình là $S=\{1\}$.

Bài 18: Giải phương trình trong tập số thực:

$x^3-x^2=(x-1)^2\sqrt{2x-1}+(x-1)\sqrt{x}$

Cách 1: Phân tích nhân tử:

Điều kiện xác định: $x\ge \frac{1}{2}$.

Ta có phương trình: $x^3-x^2=(x-1)^2\sqrt{2x-1}+(x-1)\sqrt{x}$

$\Leftrightarrow x^3-x^2-(x-1)^2\sqrt{2x-1}-(x-1)\sqrt{x}=0$

$\Leftrightarrow x^2(x-1)-(x-1)^2\sqrt{2x-1}-(x-1)\sqrt{x}=0$

$\Leftrightarrow (x-1)\left(x^2-\sqrt{x}\right)-(x-1)^2\sqrt{2x-1}=0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x}(x-1)\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+\sqrt{x}+1\right)-(x-1)^2\sqrt{2x-1}=0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x}(x-1)^2\frac{\left(x+\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt{x}+1}-(x-1)^2\sqrt{2x-1}=0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2\left[\frac{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}-\sqrt{2x-1}\right]=0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2\left[\frac{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}-\sqrt{2x^2-x}-\sqrt{2x-1}}{\sqrt{x}+1}\right]=0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(x-1)^2\left[\frac{2x\sqrt{x}+2x+2\sqrt{x}-2\sqrt{x(2x-1)}-2\sqrt{2x-1}}{\sqrt{x}+1}\right]=0$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(x-1)^2\left[\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{2x-1}\right)^2+\left(\sqrt{2x-1}-1\right)^2+2\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{7\sqrt{x}}{8}+1}{\sqrt{x}+1}\right]=0$$

$\Leftrightarrow (x-1)^2=0 \Leftrightarrow x=1$ (thỏa mãn điều kiện xác định).

Kết luận: Tập nghiệm của phương trình là $S=\{1\}$.

Chú ý: Nếu việc chứng minh biểu thức $\left(\frac{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}-\sqrt{2x-1}\right)>0$ gặp khó khăn. Chúng ta có thể sử dụng tính năng Table của máy tính để kiểm tra sau đó xét hàm số $f(x)=\frac{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}-\sqrt{2x-1}$ trên miền $\left[\frac{1}{2};+\infty\right)$ ta có thể nhận thấy hàm số luôn dương trên tập xác định đó.

Cách 2: Sử dụng bất đẳng thức AM-GM:

Điều kiện xác định: $x \ge \frac{1}{2}$.

Ta có phương trình: $x^3-x^2=(x-1)^2\sqrt{2x-1}+(x-1)\sqrt{x}$

$\Leftrightarrow x^3-x^2=\left(x^2-2x+1\right)\sqrt{2x-1}+(2x-1-x)\sqrt{x}$

$\Leftrightarrow x^3+(2x-1)\sqrt{2x-1}+x\sqrt{x}=x^2\sqrt{2x-1}+(2x-1)\sqrt{x}+\sqrt{x}^2x$

Đặt: $a=x;b=\sqrt{2x-1};c=\sqrt{x}\ \ (a,b,c\ge 0)$. Phương trình trở thành:

$a^3+b^3+c^3=a^2b+b^2c+c^2a\ (1)$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$\begin{cases} a^3+b^3+a^3 \ge 3\sqrt[3]{a^3.b^3.a^3}=3a^2b \\ b^3+c^3+b^3 \ge 3\sqrt[3]{b^3.c^3.b^3}=3b^2c \\ c^3+a^3+c^3 \ge 3\sqrt[3]{c^3.a^3.c^3}=3c^2a \end{cases}$$ do đó:

$\Rightarrow 3\left(a^3+b^3+c^3\right)\ge 3\left(a^2b+b^2c+c^2a\right)\Leftrightarrow a^3+b^3+c^3\ge a^2b+b^2c+c^2a$.

Dấu bằng xảy ra khi: $a=b=c \Leftrightarrow x=\sqrt{2x-1}=\sqrt{x}\Leftrightarrow x=1$.

Kết luận: Tập nghiệm của phương trình là $S=\{1\}$.

Bài 19: Giải phương trình trong tập số thực:

$$\frac{(4-x)\sqrt{4-x}}{\sqrt{x+2}}+\frac{(x+2)\sqrt{x+2}}{\sqrt{4-x}}=6$$

Cách 1: Nhân liên hợp:

Điều kiện xác định: $-2<x<4$.

Ta có phương trình: $\frac{(4-x)\sqrt{4-x}}{\sqrt{x+2}}+\frac{(x+2)\sqrt{x+2}}{\sqrt{4-x}}=6$

$\Leftrightarrow \frac{(4-x)^2+(x+2)^2}{\sqrt{x+2}\sqrt{4-x}}=6 \Leftrightarrow 2x^2-4x+20=6\sqrt{-x^2+2x+8}$

$\Leftrightarrow x^2-2x+1+3\left(3-\sqrt{-x^2+2x+8}\right)=0 \Leftrightarrow (x-1)^2+3\frac{x^2-2x+1}{3+\sqrt{-x^2+2x+8}}=0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2\left(1+\dfrac{3}{3+\sqrt{-x^2+2x+8}}\right)=0\,(*)$

Do $1+\dfrac{3}{3+\sqrt{-x^2+2x+8}}>0\,\forall x\in(-2;4)$ nên $(x-1)^2=0\Leftrightarrow x=1$.

Kết luận: Tập nghiệm của phương trình là $S=\{1\}$.

Cách 2: Phân tích nhân tử sử dụng đặt ẩn phụ:

Điều kiện xác định: $-2<x<4$.

Ta nhận thấy: $\left(\sqrt{x+2}\right)^2+\left(\sqrt{4-x}\right)^2=x+2+4-x=6$

Đặt: $a=\sqrt{4-x};b=\sqrt{x+2}$.

Do đó phương trình: $\dfrac{(4-x)\sqrt{4-x}}{\sqrt{x+2}}+\dfrac{(x+2)\sqrt{x+2}}{\sqrt{4-x}}=6$

$\Leftrightarrow \dfrac{a^3}{b}+\dfrac{b^3}{a}=a^2+b^2\Leftrightarrow a^4+b^4=ab\left(a^2+b^2\right)\Leftrightarrow a^4+b^4-a^3b-b^3a=0$

$\Leftrightarrow (a-b)^2\left(a^2+ab+b^2\right)=0\Leftrightarrow \left(\sqrt{4-x}-\sqrt{2+x}\right)^2\left(6+\sqrt{4-x}\sqrt{2+x}\right)=0$

$\Leftrightarrow \sqrt{4-x}=\sqrt{x+2}\Leftrightarrow x=1$ (thỏa mãn điều kiện xác định).

Kết luận: Tập nghiệm của phương trình là $S=\{1\}$.

Chú ý: Nếu đến phương trình $a^4+b^4-a^3b-b^3a=0\Leftrightarrow a^4+b^4=a^3b+b^3a\,(1)$ phân tích nhân tử gặp khó khăn chúng ta hoàn toàn có thể sử dụng bất đẳng thức AM-GM để chứng minh như sau:

$$\begin{cases} a^4+b^4+a^4+a^4\geq 4\sqrt[4]{a^4.a^4.a^4.b^4}=4a^3b \\ b^4+a^4+b^4+b^4\geq 4\sqrt[4]{b^4.a^4.b^4.b^4}=4b^3a \end{cases}$$

$\Rightarrow 4\left(a^4+b^4\right)\geq 4\left(a^3b+b^3a\right)\Leftrightarrow a^4+b^4\geq a^3b+b^3a$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=b\Leftrightarrow \sqrt{4-x}=\sqrt{x+2}\Leftrightarrow x=1$.

Bài 20: Giải phương trình: $\dfrac{x}{x^2+3x-2}+\dfrac{1}{3x-1}=\dfrac{1}{\sqrt{3x-2}}$

Cách 1: Nhân liên hợp:

Điều kiện xác định: $x>\dfrac{2}{3}$.

Ta có phương trình: $\dfrac{x}{x^2+3x-2}+\dfrac{1}{3x-1}=\dfrac{1}{\sqrt{3x-2}}$

$\Leftrightarrow \dfrac{4x^2+2x-2}{\left(x^2+3x-2\right)(3x-1)}=\dfrac{1}{\sqrt{3x-2}}\Leftrightarrow \left(4x^2+2x-2\right)\sqrt{3x-2}=\left(x^2+3x-2\right)(3x-1)$

$\Leftrightarrow \left(4x^2+2x-2\right)\sqrt{3x-2}=3x^3+8x^2-9x+2$

$\Leftrightarrow \left(4x^2+2x-2\right)\sqrt{3x-2}-3x^3-8x^2+9x-2=0$

$\Leftrightarrow -3x^3+7x^2-5x+1+\left(2x^2+x-1\right)\left(3x-1-2\sqrt{3x-2}\right)=0$

$\Leftrightarrow -3x^3+7x^2-5x+1+\left(2x^2+x-1\right)\dfrac{9x^2-6x+1-12x+8}{3x-1+2\sqrt{3x-2}}=0$

$\Leftrightarrow \left(x-1\right)^2\left(-3x+1\right)+\dfrac{9\left(2x^2+x-1\right)\left(x-1\right)^2}{3x-1+2\sqrt{3x-2}}=0$

$\Leftrightarrow \left(x-1\right)^2\left(-3x+1+\dfrac{9\left(2x^2+x-1\right)}{3x-1+2\sqrt{3x-2}}\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(x-1\right)^2\left(9x^2+15x-8-2\left(3x-1\right)\sqrt{3x-2}\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(x-1\right)^2\left(9x^2-6x+1-2\left(3x-1\right)\sqrt{3x-2}+\left(3x-2\right)+18x-7\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(x-1\right)^2\left(\left(3x-1\right)^2-2\left(3x-1\right)\sqrt{3x-2}+\left(3x-2\right)+18x-7\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(x-1\right)^2\left(\left(3x-1-\sqrt{3x-2}\right)^2+6\left(3x-2\right)+5\right)=0$ (*)

Do $\left(3x-1-\sqrt{3x-2}\right)^2+6\left(3x-2\right)+5>0\forall x>\dfrac{2}{3}$ nên $\left(x-1\right)^2=0\Leftrightarrow x=1$.

Kết luận: Tập nghiệm của phương trình là $S=\{1\}$.

Cách 2: Sử dụng bất đẳng thức AM – GM:

Điều kiện xác định: $x>\dfrac{2}{3}$.

Ta có: $\dfrac{x}{x^2+\sqrt{3x-2}^2}+\dfrac{1}{\sqrt{3x-2}^2+1}=\dfrac{1}{\sqrt{3x-2}}$.

Đặt: $a=x;\sqrt{3x-2}=b$. Phương trình trở thành: $\dfrac{a}{a^2+b^2}+\dfrac{1}{b^2+1}=\dfrac{1}{b}$.

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$a^2+b^2\ge 2ab\Rightarrow \dfrac{a}{a^2+b^2}\le\dfrac{a}{2ab}=\dfrac{1}{2b}$ và $b^2+1\ge 2b\Rightarrow\dfrac{1}{b^2+1}\le\dfrac{1}{2b}$

Do đó $\dfrac{a}{a^2+b^2}+\dfrac{1}{b^2+1}\le\dfrac{1}{2b}+\dfrac{1}{2b}=\dfrac{1}{b}$.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=b=1\Leftrightarrow x=\sqrt{3x-2}=1\Leftrightarrow x=1$.

Kết luận: Tập nghiệm của phương trình là $S=\{1\}$.

Bài 21: Giải phương trình trên tập số thực:

$x^2-x-2+\sqrt{2-x^2}\left(\sqrt{2x-1}+1\right)=0$

Cách 1: Nhân liên hợp:

Điều kiện xác định: $\dfrac{1}{2}\le x\le\sqrt{2}$

Ta có phương trình: $x^2-x-2+\sqrt{2-x^2}\left(\sqrt{2x-1}+1\right)=0$

$\Leftrightarrow -\sqrt{2-x^2}\left(x-\sqrt{2x-1}\right)-\left[\left(2-x\right)-\sqrt{2-x^2}\right]-x\left[\left(2-x\right)-\sqrt{2-x^2}\right]=0$

$\Leftrightarrow \sqrt{2-x^2}\left(x-\sqrt{2x-1}\right)+\left[(2-x)-\sqrt{2-x^2}\right]+x\left[(2-x)-\sqrt{2-x^2}\right]=0$

$\Leftrightarrow \sqrt{2-x^2}\left(x-\sqrt{2x-1}\right)+(x+1)\left[(2-x)-\sqrt{2-x^2}\right]=0$

$\Leftrightarrow \sqrt{2-x^2}\dfrac{x^2-2x+1}{x+\sqrt{2x-1}}+(x+1)\dfrac{x^2-4x+4-2+x^2}{2-x+\sqrt{2-x^2}}=0$

$\Leftrightarrow \sqrt{2-x^2}\dfrac{(x-1)^2}{x+\sqrt{2x-1}}+\dfrac{2(x+1)(x-1)^2}{(2-x)+\sqrt{2-x^2}}=0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2\left[\dfrac{\sqrt{2-x^2}}{x+\sqrt{2x-1}}+\dfrac{2x+2}{2-x+\sqrt{2-x^2}}\right]=0$ (*)

Do $\dfrac{\sqrt{2-x^2}}{x+\sqrt{2x-1}}+\dfrac{2x+2}{2-x+\sqrt{2-x^2}}>0\forall x\in\left[\dfrac{1}{2};\sqrt{2}\right]$ nên $(x-1)^2=0\Leftrightarrow x=1$.

Kết luận: Tập nghiệm của phương trình là $S=\{1\}$.

Cách 2: Sử dụng bất đẳng thức AM – GM:

Điều kiện xác định: $\dfrac{1}{2}\le x\le\sqrt{2}$

Ta có phương trình: $x^2-x-2+\sqrt{2-x^2}\left(\sqrt{2x-1}+1\right)=0$.

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$\begin{cases}\sqrt{2-x^2}\le\dfrac{1+2-x^2}{2}=\dfrac{3-x^2}{2}\\ \sqrt{2x-1}\le\dfrac{2x-1+1}{2}=x\end{cases}\Rightarrow\sqrt{2-x^2}\left(\sqrt{2x-1}+1\right)\le\dfrac{3-x^2}{2}(x+1)$

Do đó $0\le 2x^2-2x-4+\left(3-x^2\right)(x+1)\Leftrightarrow x^3-x^2-x+1\le 0$

$\Leftrightarrow (x+1)(x-1)^2\le 0$ mà $x\in\left[\dfrac{1}{2};\sqrt{2}\right]$ nên $(x+1)(x-1)^2\ge 0$

Do đó: $(x-1)^2=0\Leftrightarrow x=1$ (thỏa mãn điều kiện xác định).

Kết luận: Tập nghiệm của phương trình là $S=\{1\}$.

Cách 3: Nhóm để tạo hằng đẳng thức:

Điều kiện xác định: $\dfrac{1}{2}\le x\le\sqrt{2}$.

Ta có: $x^2-x-2+\sqrt{2-x^2}\left(\sqrt{2x-1}+1\right)=0$

$\Leftrightarrow 2+x-x^2=\sqrt{2-x^2}\left(\sqrt{2x-1}+1\right)\Leftrightarrow 2+x-x^2=\sqrt{2-x^2}\sqrt{2x-1}+\sqrt{2-x^2}$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{\left(2-x^2\right)}^2+\sqrt{(2x-1)}^2+1=2\sqrt{2-x^2}.\sqrt{2x-1}+2\sqrt{2-x^2}$

$\Leftrightarrow \left(2-x^2\right)-2\sqrt{2-x^2}\sqrt{2x-1}+(2x-1)+\left(2-x^2\right)-2\sqrt{2-x^2}+1=0$

$\Leftrightarrow\left(\sqrt{2-x^2}-\sqrt{2x-1}\right)^2+\left(\sqrt{2-x^2}-1\right)^2=0$

$\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{2-x^2}=\sqrt{2x-1}\\ \sqrt{2-x^2}=1\end{cases}\Leftrightarrow x=1$ (thỏa mãn điều kiện xác định).

Kết luận: Tập nghiệm của phương trình là $S=\{1\}$.

Bài 22: Giải phương trình trên tập số thực:

$x^2+4x+2=\left(\left(1+\sqrt{2}\right)x+\sqrt{2}\right)\sqrt{2x+1}$

Cách 1: Tạo hằng đẳng thức:

Điều kiện: $x\geq-\frac{1}{2}$.

Ta có: $x^2+4x+2=\left(\left(1+\sqrt{2}\right)x+\sqrt{2}\right)\sqrt{2x+1}$

$\Leftrightarrow x^2+4x+2=\left(x+\sqrt{2}(x+1)\right)\sqrt{2x+1}$

$\Leftrightarrow x^2+4x+2=x\sqrt{2x+1}+(x+1)\sqrt{4x+2}$

$\Leftrightarrow 2x^2+8x+4=2x\sqrt{2x+1}+2(x+1)\sqrt{4x+2}$

$\Leftrightarrow 2x^2+8x+4-2x\sqrt{2x+1}-2(x+1)\sqrt{4x+2}=0$

$\Leftrightarrow\left(x^2-2x\sqrt{2x+1}+2x+1\right)+\left(x^2+2x+1-2(x+1)\sqrt{4x+2}+4x+2\right)=0$

$\Leftrightarrow\left(x-\sqrt{2x+1}\right)^2+\left((x+1)^2-2(x+1)\sqrt{4x+2}+4x+2\right)=0$

$\Leftrightarrow\left(x-\sqrt{2x+1}\right)^2+\left(x+1-\sqrt{4x+2}\right)^2=0$

Vì $\begin{cases}\left(x-\sqrt{2x+1}\right)^2\geq0\\ \left(x+1-\sqrt{4x+2}\right)^2\geq0\end{cases}\Rightarrow\left(x-\sqrt{2x+1}\right)^2+\left(x+1-\sqrt{4x+2}\right)^2\geq0$

Do đó $\left(x-\sqrt{2x+1}\right)^2+\left(x+1-\sqrt{4x+2}\right)^2=0$ khi và chỉ khi:

$\begin{cases}x=\sqrt{2x+1}\\ x+1=\sqrt{4x+2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq0\\ x^2-2x-1=0\end{cases}\Rightarrow x=1+\sqrt{2}$

Kết luận: Tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{1+\sqrt{2}\right\}$.

Cách 2: Sử dụng đánh giá bằng bất đẳng thức AM – GM:

Điều kiện: $x\geq-\frac{1}{2}$.

Ta có: $x^2+4x+2=\left(\left(1+\sqrt{2}\right)x+\sqrt{2}\right)\sqrt{2x+1}$

$\Leftrightarrow x^2+4x+2=\left(x+\sqrt{2}(x+1)\right)\sqrt{2x+1}$

$\Leftrightarrow x^2+4x+2=x\sqrt{2x+1}+(x+1)\sqrt{4x+2}$

Theo bất đẳng thức AM – GM ta có:

$$\begin{cases} x\sqrt{2x+1} \le \dfrac{x^2+2x+1}{2} \\ (x+1)\sqrt{4x+2} \le \dfrac{x^2+2x+1+4x+2}{2} \end{cases} \Rightarrow x\sqrt{2x+1}+(x+1)\sqrt{4x+2} \le x^2+4x+2$$

Vậy $x^2+4x+2 = x\sqrt{2x+1}+(x+1)\sqrt{4x+2}$ khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} x=\sqrt{2x+1} \\ x+1=\sqrt{4x+2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x^2-2x-1=0 \end{cases} \Rightarrow x = 1+\sqrt{2}$$

Kết luận: Tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{1+\sqrt{2}\right\}$.

Cách 3: Phân tích nhân tử:

Điều kiện: $x \ge -\dfrac{1}{2}$.

Ta có: $x^2+4x+2 = \left(\left(1+\sqrt{2}\right)x+\sqrt{2}\right)\sqrt{2x+1}$

$\Leftrightarrow x^2+4x+2-\left(\left(1+\sqrt{2}\right)x+\sqrt{2}\right)\sqrt{2x+1}=0$

$\Leftrightarrow \left[\left(1+\sqrt{2}\right)x+\sqrt{2}\right]\left[\sqrt{2x+1}-\left(\sqrt{2}-1\right)x-\sqrt{2}\right]=0$

Vì $x \ge -\dfrac{1}{2}$ nên $\sqrt{2x+1}=\left(\sqrt{2}-1\right)x+\sqrt{2} \Rightarrow x=1+\sqrt{2}$.

Kết luận: Tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{1+\sqrt{2}\right\}$.

Bài 23: Giải phương trình trên tập số thực:
$x^4-2x^3+3x+2=2x\sqrt{x+1}$

Cách 1: Sử dụng hằng đẳng thức:

Điều kiện: $x \ge -1$.

Ta có: $x^4-2x^3+3x+2=2x\sqrt{x+1} \Leftrightarrow x^4-2x^3+3x+2-2x\sqrt{x+1}=0$

$\Leftrightarrow x^4-2x^3-x^2+2x+1+\left(x^2-2x\sqrt{x+1}+x+1\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(x^2-x-1\right)^2+\left(x-\sqrt{x+1}\right)^2=0$

Vì $\begin{cases} \left(x^2-x-1\right)^2 \ge 0 \\ \left(x-\sqrt{x+1}\right)^2 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \left(x^2-x-1\right)^2+\left(x-\sqrt{x+1}\right)^2 \ge 0$

Vậy $\left(x^2-x-1\right)^2+\left(x-\sqrt{x+1}\right)^2=0$ khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} x^2-x-1=0 \\ x=\sqrt{x+1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x^2-x-1=0 \end{cases} \Rightarrow x=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$$

Kết luận: Tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\right\}$.

Cách 2: Sử dụng đánh giá AM – GM:

Điều kiện: $x \ge -1$.

Theo bất đẳng thức AM – GM ta có: $2x\sqrt{x+1} \le x^2 + x + 1$.

Do đó: $x^4 - 2x^3 + 3x + 2 \le x^2 + x + 1 \Leftrightarrow x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x + 1 \le 0$

$\Leftrightarrow \left(x^2 - x - 1\right)^2 \le 0 \Rightarrow \left(x^2 - x - 1\right)^2 = 0$ vì $\left(x^2 - x - 1\right)^2 \ge 0 \forall x$.

Vậy đẳng thức xảy ra khi: $\begin{cases} x^2 - x - 1 = 0 \\ x = \sqrt{x+1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x^2 - x - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$

Kết luận: Tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\right\}$.

Bài 24: Giải phương trình trên tập số thực:

$x^2 - x + 4 = (x-1)\sqrt{x+2} + \sqrt{x^3 + x^2 - 4x + 6}$

Cách 1: Tạo hằng đẳng thức:

Điều kiện xác định: $x \ge -2$

Ta có: $x^2 - x + 4 = (x-1)\sqrt{x+2} + \sqrt{x^3 + x^2 - 4x + 6}$

$\Leftrightarrow x^2 - x + 4 = (x-1)\sqrt{x+2} + \sqrt{\left(x^2 - 2x + 2\right)(x+3)}$

Vì $x \ge -2$ nên $x + 3 > 0$, do đó $\sqrt{\left(x^2 - 2x + 2\right)(x+3)} = \sqrt{x+3}\sqrt{x^2 - 2x + 2}$.

Khi đó: $x^2 - x + 4 = (x-1)\sqrt{x+2} + \sqrt{\left(x^2 - 2x + 2\right)(x+3)}$

$\Leftrightarrow x^2 - x + 4 = (x-1)\sqrt{x+2} + \sqrt{x^2 - 2x + 2}\sqrt{x+3}$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 2x + 8 - 2(x-1)\sqrt{x+2} - 2\sqrt{x^2 - 2x + 2}\sqrt{x+3} = 0$

$\Leftrightarrow \left((x-1)^2 - 2(x-1)\sqrt{x+2} + x + 2\right) + \left(x^2 - 2x + 2 - 2\sqrt{x^2 - 2x + 2}\sqrt{x+3} + x + 3\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left(x - 1 - \sqrt{x+2}\right)^2 + \left(\sqrt{x+3} - \sqrt{x^2 - 2x + 2}\right)^2 = 0$

$\begin{cases} \left(x - 1 - \sqrt{x+2}\right)^2 \ge 0 \\ \left(\sqrt{x+3} - \sqrt{x^2 - 2x + 2}\right)^2 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \left(x - 1 - \sqrt{x+2}\right)^2 + \left(\sqrt{x+3} - \sqrt{x^2 - 2x + 2}\right)^2 \ge 0$

Do đó $\left(x - 1 - \sqrt{x+2}\right)^2 + \left(\sqrt{x+3} - \sqrt{x^2 - 2x + 2}\right)^2 = 0$ khi và chỉ khi:

$\begin{cases} x - 1 = \sqrt{x+2} \\ \sqrt{x+3} = \sqrt{x^2 - 2x + 2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \ge 1 \\ x^2 - 3x - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$

Kết luận: Tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}\right\}$.

Cách 2: Sử dụng đánh giá bằng bất đẳng thức AM – GM.

Điều kiện xác định: $x \geq -2$

Ta có: $x^2 - x + 4 = (x-1)\sqrt{x+2} + \sqrt{x^3 + x^2 - 4x + 6}$

$\Leftrightarrow x^2 - x + 4 = (x-1)\sqrt{x+2} + \sqrt{(x^2 - 2x + 2)(x+3)}$

Vì $x \geq -2$ nên $x + 3 > 0$, do đó $\sqrt{(x^2 - 2x + 2)(x+3)} = \sqrt{x+3}\sqrt{x^2 - 2x + 2}$.

Khi đó: $x^2 - x + 4 = (x-1)\sqrt{x+2} + \sqrt{(x^2 - 2x + 2)(x+3)}$

Theo bất đẳng thức AM – GM ta có:

$$\begin{cases} (x-1)\sqrt{x+2} \leq \dfrac{x^2 - 2x + 1 + x + 2}{2} \\ \sqrt{(x^2 - 2x + 2)(x+3)} \leq \dfrac{x^2 - 2x + 2 + x + 3}{2} \end{cases}$$

Cộng hai vế của hai bất phương trình trên ta được:

$x^2 - x + 4 \geq (x-1)\sqrt{x+2} + \sqrt{(x^2 - 2x + 2)(x+3)}$

Do đó $x^2 - x + 4 = (x-1)\sqrt{x+2} + \sqrt{(x^2 - 2x + 2)(x+3)}$ khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} x - 1 = \sqrt{x+2} \\ \sqrt{x+3} = \sqrt{x^2 - 2x + 2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 - 3x - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}$$

Kết luận: Tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{ \dfrac{3 + \sqrt{13}}{2} \right\}$.

Bài 25: Giải phương trình trên tập số thực:

$x^3 - x^2 + x - 2 - 2(x-1)\sqrt{x^2 + x} + 2x\sqrt{1-x} = 0$

Cách 1: Tạo hằng đẳng thức:

Điều kiện: $\left[\begin{array}{l} 0 \leq x \leq 1 \\ x \leq -1 \end{array} \right.$

Ta có: $x^3 - x^2 + x - 2 - 2(x-1)\sqrt{x^2 + x} + 2x\sqrt{1-x} = 0$

$\Leftrightarrow -x^3 + x^2 - x + 2 - 2(1-x)\sqrt{x^2 + x} - 2x\sqrt{1-x} = 0$

$\Leftrightarrow (1-x)\left(x^2 + x - 2\sqrt{x^2 + x} + 1\right) + \left(x^2 - 2x\sqrt{1-x} + 1 - x\right) = 0$

$\Leftrightarrow (1-x)\left(\sqrt{x^2 + x} - 1\right)^2 + \left(x - \sqrt{1-x}\right)^2 = 0$

Với $\left[\begin{array}{l} 0 \leq x \leq 1 \\ x \leq -1 \end{array} \right.$ ta có: $\begin{cases} (1-x)\left(\sqrt{x^2 + x} - 1\right)^2 \geq 0 \\ \left(x - \sqrt{1-x}\right)^2 \geq 0 \end{cases}$

Do đó $(1-x)\left(\sqrt{x^2 + x} - 1\right)^2 + \left(x - \sqrt{1-x}\right)^2 = 0$ khi và chỉ khi: $\begin{cases} \sqrt{x^2 + x} = 1 \\ x = \sqrt{1-x} \end{cases}$ (*)

Giải (*) và kết hợp điều kiện ta được $x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Kết luận: Tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

Cách 2: Sử dụng đánh giá bằng bất đẳng thức AM – GM:

Điều kiện: $\left[\begin{array}{l}0\le x\le 1\\ x\le -1\end{array}\right.$

Ta có: $x^3-x^2+x-2-2(x-1)\sqrt{x^2+x}+2x\sqrt{1-x}=0$

$\Leftrightarrow -x^3+x^2-x+2-2(1-x)\sqrt{x^2+x}-2x\sqrt{1-x}=0$

$\Leftrightarrow -x^3+x^2-x+2=2(1-x)\sqrt{x^2+x}+2x\sqrt{1-x}$

Theo bất đẳng thức AM – GM ta có: $\begin{cases}2(1-x)\sqrt{x^2+x}\le(1-x)(1+x^2+x)\\ 2x\sqrt{1-x}\le x^2+1-x\end{cases}$

Cộng hai vế của hai bất phương trình lại ta có:

$2(1-x)\sqrt{x^2+x}+2x\sqrt{1-x}\le(1-x)(1+x^2+x)+x^2+1-x$

$\Leftrightarrow 2(1-x)\sqrt{x^2+x}+2x\sqrt{1-x}\le -x^3+x^2-x+2$

Đẳng thức xảy ra khi: $\begin{cases}\sqrt{x^2+x}=1\\ x=\sqrt{1-x}\end{cases}$. Do đó ta được $x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Kết luận: Tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

Bài 26: Giải bất phương trình trên tập số thực:

$3(x^2-2)+\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{x^2-x+1}}>\sqrt{x}\left(\sqrt{x-1}+3\sqrt{x^2-1}\right)$

(Trích đề thi thử THPT Quốc gia 2015 lần 1 – Chu Văn An – Hà Nội)

Điều kiện xác định: $x\ge 1$.

Ta có: $3(x^2-2)+\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{x^2-x+1}}>\sqrt{x}\left(\sqrt{x-1}+3\sqrt{x^2-1}\right)$

$\Leftrightarrow 3(x^2-2)+\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{x^2-x+1}}-\sqrt{x^2-x}-3\sqrt{x}\sqrt{x^2-1}>0$

$\Leftrightarrow 6(x^2-2)+\frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{x^2-x+1}}-2\sqrt{x^2-x}-6\sqrt{x}\sqrt{x^2-1}>0$

$\Leftrightarrow 2x^2-2x-10+\frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{x^2-x+1}}+\left(x^2-x-2\sqrt{x^2-x}+1\right)+3\left(x-2\sqrt{x}\sqrt{x^2-1}+x^2-1\right)>0$

$\Leftrightarrow 2\left(x^2-x-5+\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{x^2-x+1}}\right)+\left(\sqrt{x^2-x}-1\right)^2+3\left(\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x}\right)^2>0$

Ta có: $2\left(x^2-x-5+\dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt{x^2-x+1}}\right)+\left(\sqrt{x^2-x}-1\right)^2+3\left(\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x}\right)^2>0$

Đặt $t=x^2-x\geq 0$ và xét hàm số $f(t)=t-5+\dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt{t+1}}$ ta có:

$$f'(t)=1-\frac{2\sqrt{2}}{(t+1)\sqrt{t+1}}=\frac{(t+1)\sqrt{t+1}-2\sqrt{2}}{(t+1)\sqrt{t+1}}=\frac{\left(\sqrt{t+1}-\sqrt{2}\right)\left(t+1+\sqrt{2}\sqrt{t+1}+2\right)}{(t+1)\sqrt{t+1}}$$

Do đó: $f'(t)=\dfrac{\left(\sqrt{t+1}-\sqrt{2}\right)\left(t+3+\sqrt{2}\sqrt{t+1}\right)}{(t+1)\sqrt{t+1}}=\dfrac{(t-1)\left(t+3+\sqrt{2}\sqrt{t+1}\right)}{\left(\sqrt{t+1}+\sqrt{2}\right)(t+1)\sqrt{t+1}}$

Vì $t\geq 0$ nên $f(t)=0\Leftrightarrow t=1$. Ta có bảng xét dấu:

t	0		1		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	

Từ bảng xét dấu ta thấy $f(t)\geq f(1)=0$.

Như vậy: $x^2-x-5+\dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt{x^2-x+1}}\geq 0, \left(\sqrt{x^2-x}-1\right)^2\geq 0, \left(\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x}\right)^2\geq 0$

Do đó $2\left(x^2-x-5+\dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt{x^2-x+1}}\right)+\left(\sqrt{x^2-x}-1\right)^2+3\left(\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x}\right)^2>0$

Khi và chỉ khi: $\begin{cases}t=x^2-x\neq 1\\ \sqrt{x^2-x}\neq 1\\ \sqrt{x^2-1}\neq\sqrt{x}\end{cases}\Rightarrow x\neq\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Kết luận: Tập nghiệm của bất phương trình là $S=[1;+\infty)\setminus\left\{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

Bài 27: Giải phương trình trên tập số thực:
$4x^2+1=\sqrt{3x^2-2x-1}+2x\sqrt{x^2+2x+2}$

Cách 1: Tạo hằng đẳng thức:

Điều kiện xác định: $\begin{cases}3x^2-2x-1\geq 0\\ x^2+2x+2\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\geq 1\\ x\leq -\dfrac{1}{3}\end{array}\right.$

Ta có phương trình: $4x^2+1=\sqrt{3x^2-2x-1}+2x\sqrt{x^2+2x+2}$

$\Leftrightarrow 4x^2+1-\sqrt{3x^2-2x-1}-2x\sqrt{x^2+2x+2}=0$

$\Leftrightarrow 8x^2+2-2\sqrt{3x^2-2x-1}-4x\sqrt{x^2+2x+2}=0$

$\Leftrightarrow 3x^2-2x-1-2\sqrt{3x^2-2x-1}+1+x^2+2x+2-4x\sqrt{x^2+2x+2}+4x^2=0$

$\Leftrightarrow\left(\sqrt{3x^2-2x-1}-1\right)^2+\left(2x-\sqrt{x^2+2x+2}\right)^2=0$

Vì vậy: $\begin{cases}\sqrt{3x^2-2x-1}=1\\2x=\sqrt{x^2+2x+2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\3x^2-2x-2=0\end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{1+\sqrt{7}}{3}$.

Kết luận: Tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{\dfrac{1+\sqrt{7}}{3}\right\}$.

Cách 2: Sử dụng đánh giá bằng bất đẳng thức AM – GM:

Điều kiện xác định: $\begin{cases}3x^2-2x-1\ge 0\\x^2+2x+2\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\ge 1\\x\le -\dfrac{1}{3}\end{array}\right.$

Ta có phương trình: $4x^2+1=\sqrt{3x^2-2x-1}+2x\sqrt{x^2+2x+2}$

Vì $x\ge 1$ nên chúng ta hoàn toàn có thể áp dụng BĐT

Theo bất đẳng thức AM – GM ta có: $\begin{cases}2x\sqrt{x^2+2x+2}\le\dfrac{x^2+2x+2+4x^2}{2}\\1.\sqrt{3x^2-2x-1}\le\dfrac{3x^2-2x-1+1}{2}\end{cases}$

Cộng hai vế của hai bất phương trình trên ta được:

$\sqrt{3x^2-2x-1}+2x\sqrt{x^2+2x+2}\le\dfrac{5x^2+2x+2}{2}+\dfrac{3x^2-2x}{2}=4x^2+1$

Do đó $4x^2+1=\sqrt{3x^2-2x-1}+2x\sqrt{x^2+2x+2}$ khi và chỉ khi:

$\begin{cases}\sqrt{3x^2-2x-1}=1\\2x=\sqrt{x^2+2x+2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x^2-2x-1=1\\x\ge 0\\4x^2=x^2+2x+2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\3x^2-2x-2=0\end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{1+\sqrt{7}}{3}$

Kết luận: Tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{\dfrac{1+\sqrt{7}}{3}\right\}$.

Bài 28: Giải phương trình trên tập số thực:

$x^2+1=x\sqrt{4x-2}+\sqrt{x^2-4x+3}$

Cách 1: Tạo hằng đẳng thức:

Điều kiện xác định: $\begin{cases}4x-2\ge 0\\x^2-4x+3\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge\dfrac{1}{2}\\\left[\begin{array}{l}x\ge 3\\x\le 1\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\ge 3\\\dfrac{1}{2}\le x\le 1\end{array}\right.$

Ta có phương trình: $x^2+1=x\sqrt{4x-2}+\sqrt{x^2-4x+3}$

$\Leftrightarrow x^2+1-x\sqrt{4x-2}-\sqrt{x^2-4x+3}=0$

$\Leftrightarrow 2x^2+2-2x\sqrt{4x-2}-2\sqrt{x^2-4x+3}=0$

$\Leftrightarrow\left(x^2-2x\sqrt{4x-2}+4x-2\right)+\left(x^2-4x+3-2\sqrt{x^2-4x+3}+1\right)=0$

$\Leftrightarrow\left(x-\sqrt{4x-2}\right)^2+\left(\sqrt{x^2-4x+3}-1\right)^2=0$

Vì vậy: $\begin{cases}\sqrt{4x-2}=x\\ \sqrt{x^2-4x+3}=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2=4x-2\\ x^2-4x+3=1\end{cases} \Leftrightarrow x^2-4x+2=0 \Leftrightarrow x=2\pm\sqrt{2}$

Kết luận: Phương trình có tập nghiệm $S=\left\{2+\sqrt{2};2-\sqrt{2}\right\}$.

Cách 2: Sử dụng đánh giá bằng bất đẳng thức AM – GM:

Điều kiện xác định: $\begin{cases}4x-2\ge 0\\ x^2-4x+3\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\ge\dfrac{1}{2}\\ \left[\begin{array}{l}x\ge 3\\ x\le 1\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\ge 3\\ \dfrac{1}{2}\le x\le 1\end{array}\right.$

Ta có phương trình: $x^2+1=x\sqrt{4x-2}+\sqrt{x^2-4x+3}$

Theo bất đẳng thức AM – GM ta có: $\begin{cases}x\sqrt{4x-2}\le\dfrac{x^2+4x-2}{2}\\ 1.\sqrt{x^2-4x+3}\le\dfrac{x^2-4x+3+1}{2}\end{cases}$

Cộng hai vế của hai bất phương trình trên ta được:

$x\sqrt{4x-2}+\sqrt{x^2-4x+3}\le\dfrac{x^2+4x-2}{2}+\dfrac{x^2-4x+3+1}{2}=x^2+1$

Do đó $x^2+1=x\sqrt{4x-2}+\sqrt{x^2-4x+3}$ khi và chỉ khi:

$\begin{cases}\sqrt{4x-2}=x\\ \sqrt{x^2-4x+3}=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2=4x-2\\ x^2-4x+3=1\end{cases} \Leftrightarrow x^2-4x+2=0 \Leftrightarrow x=2\pm\sqrt{2}$

Kết luận: Phương trình có tập nghiệm $S=\left\{2+\sqrt{2};2-\sqrt{2}\right\}$.

Bài 29: Giải phương trình trên tập số thực:
$x^2+4=\sqrt{5x^3-2x^2}+2\sqrt{x^2-5x+6}$

Cách 1: Tạo hằng đẳng thức:

Điều kiện xác định: $\begin{cases}5x^3-2x^2\ge 0\\ x^2-5x+6\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2(5x-2)\ge 0\\ \left[\begin{array}{l}x\ge 3\\ x\le 2\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\ge\dfrac{2}{5}\\ \left[\begin{array}{l}x\ge 3\\ x\le 2\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\ge 3\\ \dfrac{2}{5}\le x\le 2\end{array}\right.$

Ta có phương trình: $x^2+4=\sqrt{5x^3-2x^2}+2\sqrt{x^2-5x+6}$

$\Leftrightarrow x^2+4-\sqrt{5x^3-2x^2}-2\sqrt{x^2-5x+6}=0$

$\Leftrightarrow 2x^2+8-2x\sqrt{5x-2x}-4\sqrt{x^2-5x+6}=0$

$\Leftrightarrow \left(x^2-2x\sqrt{5x-2}+5x-2\right)+\left(x^2-5x+6-4\sqrt{x^2-5x+6}+4\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(x-\sqrt{5x-2}\right)^2+\left(\sqrt{x^2-5x+6}-2\right)^2=0$

Vì vậy: $\begin{cases}\sqrt{5x-2}=x\\ \sqrt{x^2-5x+6}=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2=5x-2\\ x^2-5x+6=4\end{cases} \Leftrightarrow x^2-5x+2=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{5\pm\sqrt{17}}{2}$

Kết luận: Phương trình có tập nghiệm $S=\left\{\dfrac{5-\sqrt{17}}{2};\dfrac{5+\sqrt{17}}{2}\right\}$.

Cách 2: Sử dụng đánh giá bằng bất đẳng thức AM – GM:

Điều kiện xác định: $\begin{cases} 5x^3-2x^2\ge 0 \\ x^2-5x+6\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2(5x-2)\ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} x\ge 3 \\ x\le 2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge \dfrac{2}{5} \\ \left[\begin{array}{l} x\ge 3 \\ x\le 2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\ge 3 \\ \dfrac{2}{5}\le x\le 2 \end{array}\right.$

Theo bất đẳng thức AM – GM ta có: $\begin{cases} x\sqrt{5x-2}\le \dfrac{x^2+5x-2}{2} \\ 2.\sqrt{x^2-5x+6}\le \dfrac{x^2-5x+6+4}{2} \end{cases}$

Cộng hai vế của hai bất phương trình trên ta được:

$x\sqrt{5x-2}+2\sqrt{x^2-5x+6}\le \dfrac{x^2+5x-2}{2}+\dfrac{x^2-5x+6+4}{2}=x^2+4$

Do đó $x^2+4=\sqrt{5x^3-2x^2}+2\sqrt{x^2-5x+6}$ khi và chỉ khi:

$\begin{cases} \sqrt{5x-2}=x \\ \sqrt{x^2-5x+6}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=5x-2 \\ x^2-5x+6=4 \end{cases} \Leftrightarrow x^2-5x+2=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{5\pm\sqrt{17}}{2}$

Kết luận: Phương trình có tập nghiệm $S=\left\{\dfrac{5-\sqrt{17}}{2};\dfrac{5+\sqrt{17}}{2}\right\}$.

Bài 30: Giải phương trình trên tập số thực:

$2x^2-2x+1=x\sqrt{4x-2}+(x-1)\sqrt{2x^2-6x+3}$

Cách 1: Tạo hằng đẳng thức:

Điều kiện xác định: $\begin{cases} 4x-2\ge 0 \\ 2x^2-6x+3\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\ge \dfrac{3+\sqrt{3}}{2} \\ \dfrac{1}{2}\le x\le \dfrac{3-\sqrt{3}}{2} \end{array}\right.$

Ta có phương trình: $2x^2-2x+1=x\sqrt{4x-2}+(x-1)\sqrt{2x^2-6x+3}$

$\Leftrightarrow 2x^2-2x+1-x\sqrt{4x-2}-(x-1)\sqrt{2x^2-6x+3}=0$

$\Leftrightarrow 4x^2-4x+2-2x\sqrt{4x-2}-2(x-1)\sqrt{2x^2-6x+3}=0$

$\Leftrightarrow x^2-2x\sqrt{4x-2}+4x-2+2x^2-6x+3-2(x-1)\sqrt{2x^2-6x+3}+(x-1)^2=0$

$\Leftrightarrow \left(x-\sqrt{4x-2}\right)^2+\left[\sqrt{2x^2-6x+3}-(x-1)\right]^2=0$

Vì vậy: $\begin{cases} \sqrt{4x-2}=x \\ \sqrt{2x^2-6x+3}=x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4x+2=0 \\ x\ge 1 \end{cases} \Leftrightarrow x=2+\sqrt{2}$.

Kết luận: Phương trình có tập nghiệm $S=\left\{2+\sqrt{2}\right\}$.

Cách 2: Sử dụng đánh giá bằng bất đẳng thức AM – GM:

Điều kiện xác định: $\begin{cases} 4x-2\ge 0 \\ 2x^2-6x+3\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\ge \dfrac{3+\sqrt{3}}{2} \\ \dfrac{1}{2}\le x\le \dfrac{3-\sqrt{3}}{2} \end{array}\right.$

Theo bất đẳng thức AM – GM ta có:

$$\begin{cases} x\sqrt{4x-2} \le \dfrac{x^2+4x-2}{2} \\ (x-1)\sqrt{2x^2-6x+3} \le \dfrac{2x^2-6x+3+x^2-2x+1}{2} \end{cases}$$

Cộng hai vế của hai bất phương trình trên ta được:

$$x\sqrt{4x-2}+(x-1)\sqrt{2x^2-6x+3} \le \frac{x^2+4x-2}{2}+\frac{2x^2-6x+3+x^2-2x+1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x\sqrt{4x-2}+(x-1)\sqrt{2x^2-6x+3} \le 2x^2-2x+1$$

Do đó $2x^2-2x+1 = x\sqrt{4x-2}+(x-1)\sqrt{2x^2-6x+3}$ khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} \sqrt{4x-2} = x \\ \sqrt{2x^2-6x+3} = x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 4x-2 \\ x \ge 1 \\ 2x^2-6x+3 = (x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4x+2=0 \\ x \ge 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2+\sqrt{2}$$

Kết luận: Phương trình có tập nghiệm $S = \{2+\sqrt{2}\}$.

Bài 31: Giải phương trình trên tập số thực:

$2x^2+2x+1 = x\sqrt{3x+1}+\sqrt{2x^4+3x^3-x}$

Cách 1: Tạo hằng đẳng thức:

Điều kiện xác định: $\begin{cases} 3x+1 \ge 0 \\ 2x^4+3x^3-x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \ge \dfrac{1}{2} \vee -\dfrac{1}{3} \le x \le 0$.

Ta có phương trình: $2x^2+2x+1 = x\sqrt{3x+1}+\sqrt{2x^4+3x^3-x}$

$$\Leftrightarrow 2x^2+2x+1-x\sqrt{3x+1}-\sqrt{2x^4+3x^3-x} = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x^2+4x+2-2x\sqrt{3x+1}-2\sqrt{2x^4+3x^3-x} = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x^2+4x+2-2x\sqrt{3x+1}-2\sqrt{(x+1)^2(2x^2-x)} = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x^2+4x+2-2x\sqrt{3x+1}-2(x+1)\sqrt{2x^2-x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2-2x\sqrt{3x+1}+3x+1\right)+\left[2x^2-x-2(x+1)\sqrt{2x^2-x}+(x+1)^2\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x-\sqrt{3x+1}\right)^2+\left(x+1-\sqrt{2x^2-x}\right)^2 = 0$$

Vì vậy: $\begin{cases} \sqrt{3x+1} = x \\ \sqrt{2x^2-x} = x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 3x+1 \\ 2x^2-x = (x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{3\pm\sqrt{13}}{2}$.

Kết luận: Phương trình có tập nghiệm $S = \left\{\dfrac{3-\sqrt{13}}{2}; \dfrac{3+\sqrt{13}}{2}\right\}$.

Cách 2: Sử dụng đánh giá bằng bất đẳng thức AM – GM:

Điều kiện xác định: $\begin{cases}3x+1\ge 0\\2x^4+3x^3-x\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow x\ge\frac{1}{2}\vee-\frac{1}{3}\le x\le 0$.

Ta có phương trình: $2x^2+2x+1=x\sqrt{3x+1}+\sqrt{2x^4+3x^3-x}$

$\Leftrightarrow 2x^2+2x+1=x\sqrt{3x+1}+\sqrt{(x+1)^2(2x^2-x)}$

$\Leftrightarrow 2x^2+2x+1=x\sqrt{3x+1}+(x+1)\sqrt{2x^2-x}$

Theo bất đẳng thức AM – GM ta có: $\begin{cases}x\sqrt{3x+1}\le\dfrac{x^2+3x+1}{2}\\(x+1)\sqrt{2x^2-x}\le\dfrac{2x^2-x+x^2+2x+1}{2}\end{cases}$

Cộng hai vế của hai bất phương trình trên ta được:

$x\sqrt{3x+1}+(x+1)\sqrt{2x^2-x}\le\frac{x^2+3x+1}{2}+\frac{2x^2-x+x^2+2x+1}{2}$

$\Leftrightarrow x\sqrt{3x+1}+(x+1)\sqrt{2x^2-x}\le 2x^2+2x+1$

Do đó $2x^2+2x+1=x\sqrt{3x+1}+(x+1)\sqrt{2x^2-x}$ khi và chỉ khi:

$\begin{cases}\sqrt{3x+1}=x\\\sqrt{2x^2-x}=x+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2=3x+1\\2x^2-x=(x+1)^2\end{cases}\Leftrightarrow x^2-3x-1=0\Leftrightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{13}}{2}$

Kết luận: Phương trình có tập nghiệm $S=\left\{\frac{3-\sqrt{13}}{2};\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right\}$

Bài 32: Giải phương trình trên tập số thực:

$2x^2+2x+1=x\sqrt{5x-2}+\sqrt{2x^4+x^3-x^2+3x+3}$

Cách 1: Tạo hằng đẳng thức:

Điều kiện xác định: $x\ge\frac{2}{5}$.

Ta có phương trình: $2x^2+2x+1=x\sqrt{5x-2}+\sqrt{2x^4+x^3-x^2+3x+3}$

$\Leftrightarrow 2x^2+2x+1-x\sqrt{5x-2}-\sqrt{2x^4+x^3-x^2+3x+3}=0$

$\Leftrightarrow 2x^2+2x+1-x\sqrt{5x-2}-\sqrt{(x+1)^2(2x^2-3x+3)}=0$

$\Leftrightarrow 4x^2+4x+2-2x\sqrt{5x-2}-2(x+1)\sqrt{2x^2-3x+3}=0$

$\Leftrightarrow\left(x^2-2x\sqrt{5x-2}+5x-2\right)+\left[2x^2-3x+3-2(x+1)\sqrt{2x^2-3x+3}+(x+1)^2\right]=0$

$\Leftrightarrow\left(x-\sqrt{5x-2}\right)^2+\left(x+1-\sqrt{2x^2-3x+3}\right)^2=0$

Vì vậy: $\begin{cases}\sqrt{5x-2}=x\\\sqrt{2x^2-3x+3}=x+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2=5x-2\\2x^2-3x+3=(x+1)^2\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{5\pm\sqrt{17}}{2}$

Kết luận: Phương trình có tập nghiệm $S=\left\{\frac{5-\sqrt{17}}{2};\frac{5+\sqrt{17}}{2}\right\}$

Cách 2: Sử dụng đánh giá bằng bất đẳng thức AM – GM:

Điều kiện xác định: $x \ge \frac{2}{5}$.

Ta có phương trình: $2x^2+2x+1=x\sqrt{5x-2}+\sqrt{2x^4+x^3-x^2+3x+3}$

$\Leftrightarrow 2x^2+2x+1=x\sqrt{5x-2}+\sqrt{(x+1)^2(2x^2-3x+3)}$

$\Leftrightarrow 2x^2+2x+1=x\sqrt{5x-2}+(x+1)\sqrt{2x^2-3x+3}$

Theo bất đẳng thức AM – GM ta có:

$$\begin{cases} x\sqrt{5x-2} \le \dfrac{x^2+5x-2}{2} \\ (x+1)\sqrt{2x^2-3x+3} \le \dfrac{2x^2-3x+3+x^2+2x+1}{2} \end{cases}$$

Cộng hai vế của hai bất phương trình trên ta được:

$x\sqrt{5x-2}+(x+1)\sqrt{2x^2-3x+3} \le \dfrac{x^2+5x-2}{2}+\dfrac{2x^2-3x+3+x^2+2x+1}{2}$

$\Leftrightarrow x\sqrt{5x-2}+(x+1)\sqrt{2x^2-3x+3} \le 2x^2+2x+1$

Do đó $\Leftrightarrow 2x^2+2x+1=x\sqrt{5x-2}+(x+1)\sqrt{2x^2-3x+3}$ khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} \sqrt{5x-2}=x \\ \sqrt{2x^2-3x+3}=x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=5x-2 \\ 2x^2-3x+3=(x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x^2-5x+2=0 \Leftrightarrow x=\frac{5\pm\sqrt{17}}{2}$$

Kết luận: Phương trình có tập nghiệm $S=\left\{\frac{5-\sqrt{17}}{2};\frac{5+\sqrt{17}}{2}\right\}$

Bài 33: Giải phương trình trong tập số thực:

$5x^2+2x+1=2x\sqrt{1-x}+(x+1)\sqrt{5x^2+3x}$

Cách 1: Tạo hằng đẳng thức:

Điều kiện xác định: $\begin{cases} 1-x\ge 0 \\ 5x^2+3x\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le 1 \\ \left[\begin{array}{l} x\ge 0 \\ x\le -\frac{3}{5} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0\le x\le 1 \\ x\le -\frac{3}{5} \end{array}\right.$

Ta có phương trình: $5x^2+2x+1=2x\sqrt{1-x}+(x+1)\sqrt{5x^2+3x}$

$\Leftrightarrow 5x^2+2x+1-2x\sqrt{1-x}-(x+1)\sqrt{5x^2+3x}=0$

$\Leftrightarrow 10x^2+4x+2-4x\sqrt{1-x}-2(x+1)\sqrt{5x^2+3x}=0$

$\Leftrightarrow \left(4x^2-4x\sqrt{1-x}+1-x\right)+\left[5x^2+3x-2(x+1)\sqrt{5x^2+3x}+(x+1)^2\right]=0$

$\Leftrightarrow \left(2x-\sqrt{1-x}\right)^2+\left(x+1-\sqrt{5x^2+3x}\right)^2=0$

Vì vậy: $\begin{cases} \sqrt{1-x}=2x \\ \sqrt{5x^2+3x}=x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2+x-1=0 \\ x\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{-1+\sqrt{17}}{2}$.

Kết luận: Phương trình có tập nghiệm $S=\left\{\frac{-1+\sqrt{17}}{2}\right\}$

Cách 2: Sử dụng đánh giá bằng bất đẳng thức AM – GM:

Điều kiện xác định: $\begin{cases}1-x\ge 0\\5x^2+3x\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 1\\\left[\begin{array}{l}x\ge 0\\x\le -\frac{3}{5}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}0\le x\le 1\\x\le -\frac{3}{5}\end{array}\right.$

Ta có phương trình: $5x^2+2x+1=2x\sqrt{1-x}+(x+1)\sqrt{5x^2+3x}$

Theo bất đẳng thức AM – GM ta có:

$$\begin{cases}2x\sqrt{1-x}\le\frac{4x^2+1-x}{2}\\(x+1)\sqrt{5x^2+3x}\le\frac{5x^2+3x+x^2+2x+1}{2}\end{cases}$$

Cộng hai vế của hai bất phương trình trên ta được:

$$2x\sqrt{1-x}+(x+1)\sqrt{5x^2+3x}\le\frac{4x^2+1-x}{2}+\frac{5x^2+3x+x^2+2x+1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2x\sqrt{1-x}+(x+1)\sqrt{5x^2+3x}\le 5x^2+2x+1$$

Do đó $5x^2+2x+1=2x\sqrt{1-x}+(x+1)\sqrt{5x^2+3x}$ khi và chỉ khi:

$$\begin{cases}\sqrt{1-x}=2x\\\sqrt{5x^2+3x}=x+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4x^2=1-x\\x\ge 0\\5x^2+3x=(x+1)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4x^2+x-1=0\\x\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{-1+\sqrt{17}}{2}$$

Kết luận: Phương trình có tập nghiệm $S=\left\{\frac{-1+\sqrt{17}}{2}\right\}$.

Bài 34: Giải bất phương trình trên tập số thực:

$$2x^2-3x-6+\frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{x^2-3x+2}}>\sqrt{x^2-3x}+x\sqrt{3x+1}$$

Bài giải

Điều kiện xác định: $\begin{cases}x^2-3x\ge 0\\3x+1\ge 0\\x^2-3x+2>0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-\frac{1}{3}\le x\le 0\\x\ge 3\end{array}\right.$

Ta có bất phương trình: $2x^2-3x-6+\frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{x^2-3x+2}}>\sqrt{x^2-3x}+x\sqrt{3x+1}$

$$\Leftrightarrow 2x^2-3x-6+\frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{x^2-3x+2}}-\sqrt{x^2-3x}-x\sqrt{3x+1}>0$$

$$\Leftrightarrow 4x^2-6x-12+\frac{12\sqrt{3}}{\sqrt{x^2-3x+2}}-2\sqrt{x^2-3x}-2x\sqrt{3x+1}>0$$

$$\Leftrightarrow\left(x^2-3x-2\sqrt{x^2-3x}+1\right)+\left(x^2-2x\sqrt{3x+1}+3x+1\right)+\left(2x^2-6x-14+\frac{12\sqrt{3}}{\sqrt{x^2-3x+2}}\right)>0$$

$$\Leftrightarrow 2\left(x^2-3x-7+\frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{x^2-3x+2}}\right)+\left(\sqrt{x^2-3x}-1\right)^2+\left(x-\sqrt{3x+1}\right)^2>0$$

Ta có: $2\left(x^2-3x-7+\frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{x^2-3x+2}}\right)+\left(\sqrt{x^2-3x}-1\right)^2+\left(x-\sqrt{3x+1}\right)^2>0$

Đặt $t=x^2-3x\geq 0$ và xét hàm số $f(t)=t-7+\frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{t+2}}$ ta có:

$$f'(t)=1-\frac{3\sqrt{3}}{(t+2)\sqrt{t+2}}=\frac{(t+2)\sqrt{t+2}-3\sqrt{3}}{(t+2)\sqrt{t+2}}=\frac{\left(\sqrt{t+2}-\sqrt{3}\right)\left(t+2+\sqrt{3}\sqrt{t+2}+3\right)}{(t+2)\sqrt{t+2}}$$

Do đó: $f'(t)=\frac{\left(\sqrt{t+2}-\sqrt{3}\right)\left(t+5+\sqrt{3}\sqrt{t+2}\right)}{(t+2)\sqrt{t+2}}=\frac{(t-1)\left(t+5+\sqrt{3}\sqrt{t+2}\right)}{\left(\sqrt{t+2}+\sqrt{3}\right)(t+2)\sqrt{t+2}}$

Vì $t\geq 0$ nên $f(t)=0\Leftrightarrow t=1$. Ta có bảng xét dấu:

t	0		1		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	

Từ bảng xét dấu ta thấy $f(t)\geq f(1)=0$.

Như vậy: $x^2-3x-7+\frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{x^2-3x+2}}\geq 0, \left(\sqrt{x^2-3x}-1\right)^2\geq 0, \left(x-\sqrt{3x+1}\right)^2\geq 0$

Do đó $2\left(x^2-3x-7+\frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{x^2-3x+2}}\right)+\left(\sqrt{x^2-3x}-1\right)^2+\left(x-\sqrt{3x+1}\right)^2>0$

Khi và chỉ khi: $\begin{cases} t=x^2-3x\neq 1 \\ \sqrt{x^2-3x}\neq 1 \\ \sqrt{3x+1}\neq x \end{cases}\Rightarrow x\neq\frac{3+\sqrt{13}}{2}$.

Kết luận: Bất phương trình có tập nghiệm $S=\left[-\frac{1}{3};0\right]\cup\left[3;+\infty\right]\backslash\left\{\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right\}$.

Bài 35: Giải phương trình trên tập số thực:

$$x^4-8x^3+20x^2-20x+4+\frac{2}{\sqrt{x-1}\sqrt{x-3}}+(2x-2)\sqrt{2x-1}=0$$

Điều kiện xác định: $x>3$.

Ta có: $x^4-8x^3+20x^2-20x+4+\frac{2}{\sqrt{x-1}\sqrt{x-3}}+(2x-2)\sqrt{2x-1}=0$

$$\Leftrightarrow\left(x^2-4x+2\right)^2-\left(x-1-\sqrt{2x-1}\right)^2+x^2-4x+\frac{2}{\sqrt{x-1}\sqrt{x-3}}=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x-1-\sqrt{2x-1}\right)^2\left[\left(x-1+\sqrt{2x-1}\right)^2-1\right]+x^2-4x+\frac{2}{\sqrt{x^2-4x+3}}=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x-1-\sqrt{2x-1}\right)^2\left[x^2-1+2(x-1)\sqrt{2x-1}\right]+x^2-4x+\frac{2}{\sqrt{x^2-4x+3}}=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x-1-\sqrt{2x-1}\right)^2\left(x-2+\sqrt{2x-1}\right)\left(x+\sqrt{2x-1}\right)+x^2-4x+\frac{2}{\sqrt{x^2-4x+3}}=0$$

Ta nhận thấy với $x>3$ thì $\left(x-2+\sqrt{2x-1}\right)>0$ và $\left(x+\sqrt{2x-1}\right)>0$

Do đó: $\left(x-1-\sqrt{2x-1}\right)^2\left(x-2+\sqrt{2x-1}\right)\left(x+\sqrt{2x-1}\right)\geq 0$

Xét biểu thức $\left(x^2-4x+\dfrac{2}{\sqrt{x^2-4x+3}}\right)$.

Đặt $t=x^2-4x>-3$ và xét hàm số $f(t)=t+\dfrac{2}{\sqrt{t+3}}$ ta có:

$$f'(t)=1-\frac{1}{(t+3)\sqrt{t+3}}=\frac{(t+3)\sqrt{t+3}-1}{(t+3)\sqrt{t+3}}=\frac{\left(\sqrt{t+3}-1\right)\left(t+4+\sqrt{t+3}\right)}{(t+3)\sqrt{t+3}}$$

Do đó: $f'(t)=0\Leftrightarrow\sqrt{t+3}=1\Leftrightarrow t=-2$

Ta có bảng xét dấu:

t	0		-2		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	

Từ bảng xét dấu ta thấy $f(t)\geq f(-2)=0$.

Như vậy: $\left(x^2-4x+\dfrac{2}{\sqrt{x^2-4x+3}}\right)\geq 0$ và phần biểu thức

$\left(x-1-\sqrt{2x-1}\right)^2\left(x-2+\sqrt{2x-1}\right)\left(x+\sqrt{2x-1}\right)\geq 0$

Do đó Vế trái của phương trình luôn lớn hơn hoặc bằng 0

Vì vậy để phương trình có nghiệm khi và chỉ khi:

$$\begin{cases}x^2-4x+\dfrac{2}{\sqrt{x^2-4x+3}}=0\\ \left(x-1-\sqrt{2x-1}\right)^2\left(x-2+\sqrt{2x-1}\right)\left(x+\sqrt{2x-1}\right)=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-4x+2=0\\ x>3\end{cases}\Leftrightarrow x=2+\sqrt{2}$$

Kết luận: Phương trình có tập nghiệm $S=\left\{2+\sqrt{2}\right\}$.

Chủ đề 5:
ĐẶT ẨN PHỤ KHÔNG HOÀN TOÀN

I. Đặt vấn đề:

Đây là một dạng phương pháp giải quyết các phương trình có dạng $A\sqrt{B}=C$ bằng cách nhóm về nhân tử mà không cần quan tâm đến nghiệm của phương trình. Các bước làm như sau:

<u>**Bước 1**</u>: đặt $t=\sqrt{B}$ điều kiện $t\geq 0$.

Xét phương trình tổng quát có dạng $\alpha t^2 - At + C - \alpha B = 0$.

<u>**Bước 2**</u>:

- Đối với phương trình vô tỷ một biến x: Gán cho $x=100$ khi đó ta được phương trình bậc hai với ẩn là t và tham số là α.
- Đối với phương trình vô tỷ hai biến x,y: Gán cho $x=100, y=\frac{1}{100}$ khi đó ta được phương trình bậc hai với ẩn là t và tham số là α.

<u>**Bước 3 :**</u>

- Tính Δ và tìm α sao cho $\sqrt{\Delta}=f(\alpha)$ là số hữu tỷ và $\alpha\neq 0$
- Khi tìm $\sqrt{\Delta}=f(\alpha)$ chúng ta sử dụng TABLE với Start = -9; End = 9; Step = 1 tìm giá trị $\alpha\neq 0$ thỏa mãn điều kiện trên.
- Ta tìm được α và tính được $\sqrt{\Delta}$.

Trong phần này, chúng ta sẽ chỉ đề cập đến việc đặt ẩn phụ không hoàn toàn giải hệ phương trình, kỹ năng đặt ẩn phụ không hoàn toàn giải hệ phương trình sẽ được đề cập sau.

II. Bài tập áp dụng:

Bài 1: Giải phương trình sau: $(x^2+1)\sqrt{x^3+x-1}=2x^2+2x+3$ (1)

Phân tích

Đặt $\sqrt{x^3+x-1}=t$ với $t\geq 0 \Rightarrow t^2=x^3+x-1$ khi đó theo phương trình tổng quát ta đi tìm α vậy phương trình đã cho có dạng như sau:

$\alpha t^2-(x^2+1)t+2x^2+2x+3-\alpha(x^3+x-1)=0$ (2).

Gán giá trị cho $x=10$ khi đó phương trình (2)

$\Leftrightarrow \alpha t^2-101t+223-1009\alpha=0$.

Tới đây ta tiến hành giải Δ với tham số α và với ẩn là t.

$\Delta=(101)^2-4\alpha(223-1009\alpha)\Rightarrow\sqrt{\Delta}=\sqrt{(101)^2-4\alpha(223-1009\alpha)}$.

Xét hàm số $f(\alpha)=\sqrt{\Delta}=\sqrt{(101)^2-4\alpha(223-1009\alpha)}$.

Sử dụng chức năng TABLE để tìm $\alpha \neq 0$ và α nguyên sao cho $f(\alpha)=\sqrt{\Delta}$ có giá trị hữu tỷ:

Xét công cụ TABLE (mode 7) cho:

$F(X)=\sqrt{(101)^2-4X(223-1009X)}$

Với các giá trị:

- START = –9.
- END = 9.
- STEP = 1.

Khi đó ta tìm giá trị X sao cho F(X) nhận giá trị hữu tỷ và đồng thời X là giá trị khác 0.

Dựa vào bảng giá trị TABLE như trên, ta nhận thấy với X = – 1 thì:

$F(X)=123=100+20+3=x^2+2x+3$

Vậy nếu lựa chọn $\alpha=1$ thì:

$\sqrt{\Delta}=x^2+2x+3$

Do đó, nếu ta lựa chọn:

$\begin{cases}\alpha=-1\\ f(\alpha)=123\end{cases}\Rightarrow\sqrt{\Delta}=123=x^2+2x+3$

Vậy với cách đặt ẩn phụ là t và $\alpha=-1$ ta được phương trình có :

X	F(X)
–9	587.4904...
–8	525.0152...
–7	462.8271...
–6	401.0598...
–5	339.9426...
–4	279.9017...
–3	221.8129...
–2	167.7170...
–1	123
0	101
1	115.5205...
2	156.7194...
3	209.4015...
4	266.8501...
5	326.5593...
6	387.4854...
7	449.1336...
8	511.2426...
9	573.6627...

$\sqrt{\Delta}=123=100+20+3=x^2+2x+3\Rightarrow\Delta=\left(x^2+2x+3\right)^2$.

Vậy khi đó phương trình đã cho có dạng như sau:

$-t^2-\left(x^2+1\right)t+\left(2x^2+2x+3\right)+\left(x^3+x-1\right)=0$.

$\Leftrightarrow -t^2-\left(x^2+1\right)t+\left(x^3+2x^2+3x+2\right)=0$.

$\Rightarrow\Delta=\left(x^2+1\right)^2-4\left(x^3+2x^2+3x+2\right)=\left(x^2+2x+3\right)^2\Rightarrow\sqrt{\Delta}=\left(x^2+2x+3\right)$.

Khi đó, bằng công thức nghiệm của phương trình bậc 2, ta thu được hai nghiệm sau :

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\dfrac{x^2+1+x^2+2x+3}{-2}=-\dfrac{\left(x^2+x+2\right)}{2}\\ t=\dfrac{x^2+1-x^2-2x-3}{-2}=x+1\end{array}\right.$$

Đến đây phương trình sẽ được viết dưới dạng nhân tử như sau:

$\left(t+\dfrac{x^2+x+2}{2}\right)(t-x-1)=0\Leftrightarrow\left(2t+x^2+x+2\right)(t-x-1)=0$

$\Leftrightarrow\left(x^2+x+2+2\sqrt{x^3+x-1}\right)\left(x+1-\sqrt{x^3+x-1}\right)=0$

Chú ý : Ta có thể lựa chọn việc gán $x=10$ hay $x=100$ đều có ý nghĩa tương tự nhau.

Bài giải

Điều kiên xác định $\forall x\in\mathbb{R}$.

$\left(x^2+1\right)\sqrt{x^3+x-1}=2x^2+2x+3$

$\Leftrightarrow\left(x^2+x+2+2\sqrt{x^3+x-1}\right)\left(x+1-\sqrt{x^3+x-1}\right)=0$

$\Leftrightarrow\left(\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{3}{4}+2\sqrt{x^3+x-1}\right)\left(x+1-\sqrt{x^3+x-1}\right)=0$

Vì $\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{3}{4}+2\sqrt{x^3+x-1}>0\forall x\in\mathbb{R}$ do đó:

$\sqrt{x^3+x-1}=x+1\Leftrightarrow\begin{cases}\left(\sqrt{x^3+x-1}\right)^2=(x+1)^2\\x+1\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(x^3+x-1\right)=x^2+2x+1\\x+1\geq 0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x^3-x^2-x-2=0\\x+1\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-2)\left(x^2+x+1\right)=0\\x+1\geq 0\end{cases}\Rightarrow x=2$

Kết luận: Vậy nghiệm của phương trình là $x=2$.

Bài 2: Giải phương trình sau : $(x+1)\sqrt{6x^2-6x+25}=23x-13$

Phân tích

Trong bài toán này ta dùng phương pháp đặt ẩn phụ không hoàn toàn .

Đặt $\sqrt{6x^2-6x+25}=t$ với $t\geq 0$ khi đó ta đi tìm $\alpha\neq 0$ theo phương trình tổng quát đã cho có dạng như sau.

$\alpha t^2+(x+1)t-(23x-13)-\alpha\left(6x^2-6x+25\right)=0.$ (2)

Ta gán cho giá trị của $x=100$ khi đó phương trình (2) đã cho có dạng.

$\alpha t^2+101t-2287-59425\alpha=0\Rightarrow\Delta=(101)^2+4\alpha(2287+59425\alpha)$

$\Rightarrow\sqrt{\Delta}=\sqrt{(101)^2+4\alpha(2287+59425\alpha)}$.

Xét hàm số $f(\alpha)=\sqrt{\Delta}=\sqrt{(101)^2+4\alpha(2287+59425\alpha)}$.

Sử dụng chức năng TABLE trong Casio tìm $\alpha\neq 0$ và có giá trị nguyên với Start = -9 , End = 9, Step = 1 ta có : $\begin{cases}\alpha=1\\f(\alpha)=507\end{cases}\Rightarrow\sqrt{\Delta}=507=500+7=5x+7\Rightarrow\Delta=(5x+7)^2$

Khi đó phương trình đã cho có dạng:

$t^2+(x+1)t-(23x-13)-\left(6x^2-6x+25\right)=0$.

$\Leftrightarrow t^2+(x+1)t-\left(6x^2+17x+12\right)=0$.

Tới đây chúng ta đi giải phương trình trên theo ẩn t

$\Rightarrow \Delta=(x+1)^2+4(6x^2+17x+12)=25x^2+70x+49=(5x+7)^2$

Nghiệm của phương trình là:

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} t=\dfrac{-(x+1)+(5x+7)}{2}=2x+3 \\ t=\dfrac{-(x+1)-(5x+7)}{2}=-(3x+4)\end{array}\right.$$

Bài giải

Điều kiện xác định $\forall x\in\mathbb{R}$.

Ta có : $(x+1)\sqrt{6x^2-6x+25}=23x-13$

$\Leftrightarrow\left(2x+3-\sqrt{6x^2-6x+25}\right)\left(3x+4+\sqrt{6x^2-6x+25}\right)=0$

Trường hợp 1: $-(3x+4)=\sqrt{6x^2-6x+25}\Leftrightarrow\begin{cases} x\le-\dfrac{4}{3} \\ (3x+4)^2=6x^2-6x+25\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases} x\le-\dfrac{4}{3} \\ 3x^2+30x-9=0\end{cases}\Leftrightarrow x=-2\sqrt{7}-5$ (Thỏa mãn).

Trường hợp 2: $\sqrt{6x^2-6x+25}=2x+3$

$\Leftrightarrow\sqrt{6x^2-6x+25}=2x+3\Leftrightarrow\begin{cases}\left(\sqrt{6x^2-6x+25}\right)^2=(2x+3)^2 \\ 2x+3\ge0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}4x^2+12x+9=6x^2-6x+25 \\ 2x+3\ge0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x^2-18x+16=0 \\ x\ge-\dfrac{3}{2}\end{cases}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=8\end{array}\right.$

Kết luận: Tập nghiệm của phương trình đã cho là : $x\in\left\{1;8;-5-2\sqrt{7}\right\}$.

Bài 3: Giải phương trình: $(x^2-1)\sqrt{2x^2-x+15}=x^3+2x^2+6x-9$

Phân tích

Đặt $\sqrt{2x^2-x+15}=t$ với $t\ge0$ khi đó ta đi tìm α theo phương trình tổng quát đã cho như sau :

$\alpha t^2+(x^2-1)t-(x^3+2x^2+6x-9)-\alpha(2x^2-x+15)=0$. (2)

Gán giá trị cho $x=10$ khi đó phương trình (2) có dạng :

$\alpha t^2+9999t-1020591-19915\alpha=0$.

Lúc này ta coi ẩn là t và α là tham số, tính Δ cho phương trình trên

$\Delta=(9999)^2+4\alpha(1020591+19915\alpha)\Rightarrow\sqrt{\Delta}=\sqrt{(9999)^2+4\alpha(1020591+19915\alpha)}$,

Xét hàm số $f(\alpha)=\sqrt{\Delta}=\sqrt{(9999)^2+4\alpha(1020591+19915\alpha)}$

Dùng chức năng TABLE trong Casio tìm $\alpha \neq 0$ và là số nguyên với Start = - 9, End = 9, Step = 1 ta có:

$$\begin{cases} \alpha = 1 \\ f(\alpha) = 10205 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 10205 = 10000 + 200 + 5 = x^2 + 2x + 5$$

Phương trình đã cho có dạng:

$t^2 + (x^2 - 1)t - (x^3 + 4x^2 + 5x + 6) = 0$.

$\Delta = (x^2 - 1) + 4(x^3 + 4x^2 + 5x + 6) = (x^2 + 2x + 5)^2 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = (x^2 + 2x + 5)$.

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{-(x^2 - 1) + (x^2 + 2x + 5)}{2} = x + 3 \\ t = \dfrac{-(x^2 - 1) - (x^2 + 2x + 5)}{2} = -x^2 - x - 2 \end{array} \right.$$

Bài giải

Điều kiện xác định $\forall x \in \mathbb{R}$.

$(x^2 - 1)\sqrt{2x^2 - x + 15} = x^3 + 2x^2 + 6x - 9$

$\Leftrightarrow \left(x + 3 - \sqrt{2x^2 - x + 15}\right)\left(x^2 + x + 2 + \sqrt{2x^2 - x + 15}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left(x + 3 - \sqrt{2x^2 - x + 15}\right)\left(\left(x + \dfrac{1}{4}\right)^2 + \dfrac{7}{4} + \sqrt{2x^2 - x + 15}\right) = 0$

Vì $\left(x + \dfrac{1}{4}\right)^2 + \dfrac{7}{4} + \sqrt{2x^2 - x + 15} > 0 \forall x \in \mathbb{R}$.

Do đó $x + 3 = \sqrt{2x^2 - x + 15}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x + 3)^2 = \left(\sqrt{2x^2 - x + 15}\right)^2 \\ x + 3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 6x + 9 = 2x^2 - x + 15 \\ x \geq -3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 6 \end{array} \right.$$

Kết Luận: Vậy tập nghiệm của phương trình là $x \in \{1;6\}$.

Bài 4: Giải phương trình : $(x^2 + 8)\sqrt{2x^2 - 12x + 14} = x^3 - 4x^2 + 14x - 29$.

Phân tích

Đặt $\sqrt{2x^2 - 12x + 14} = t$, $t \geq 0 \Rightarrow t^2 = 2x^2 - 12x + 14$, khi đó theo phương trình tổng quát ta đi tìm α và phương trình đã cho có dạng:

$\alpha t^2 + (x^2 + 8)t - (x^3 - 4x^2 + 14x - 29) - \alpha(2x^2 - 12x + 14) = 0$. (2)

Gán $x = 10$ cho phương trình (2) ta có:

$\alpha t^2 + 10008t - 961371 - 18814\alpha = 0$

Tới đây ta coi t là ẩn của phương trình và α là tham số,tính

$\Delta = (10008)^2 + 4\alpha(961371 + 18814\alpha)$

$\Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{(10008)^2 + 4\alpha(961371 + 18814\alpha)}$.

Xét hàm số $f(\alpha)=\sqrt{\Delta}=\sqrt{(10008)^2+4\alpha(961371+18814\alpha)}$.

Dùng chức năng TABLE trong Casio ta tìm α sao cho $\alpha\neq 0$ và là một số nguyên. Với Start = -9, End = 9, Step = 1 ta thu được:

$$\begin{cases}\alpha=1\\ f(\alpha)=10202\end{cases}\Rightarrow\sqrt{\Delta}=10202=10000+200+2=(x^2+2x+2)$$

Phương trình đã cho

$$\Leftrightarrow t^2+(x^2+8)t-(x^3-4x^2+14x-29)-(2x^2-12x+14)=0$$

$$\Leftrightarrow t^2+(x^2+8)t-(x^3-2x^2+2x-15)=0.$$

$$\Delta=(x^2+8)^2+4(x^3-2x^2+2x-15)=x^4+4x^3+8x^2+8x+4=(x^2+2x+2)^2$$

$$\Rightarrow\sqrt{\Delta}=(x^2+2x+2).$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\dfrac{-(x^2+8)+(x^2+2x+2)}{2}=x-3\\ t=\dfrac{-(x^2+8)-(x^2+2x+2)}{2}=-x^2-x-5\end{array}\right.$$

Bài giải

Điều kiện xác định $\forall x\in\mathbb{R}$.

Ta có: $(x^2+8)\sqrt{2x^2-12x+14}=x^3-4x^2+14x-29$

$$\Leftrightarrow\left(x-3-\sqrt{2x^2-12x+14}\right)\left(x^2+x+5+\sqrt{2x^2-12x+14}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x-3-\sqrt{2x^2-12x+14}\right)\left(\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{17}{4}+\sqrt{2x^2-12x+14}\right)=0$$

Vì $\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{17}{4}+\sqrt{2x^2-12x+14}>0\forall x\in\mathbb{R}$.

Do đó $x-3=\sqrt{2x^2-12x+14}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x-3\geq 0\\ (x-3)^2=2x^2-12x+14\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 3\\ x^2-6x+5=0\end{cases}\Leftrightarrow x=4$$

Kết luận : Vậy nghiệm của phương trình đã cho $x=4$.

Bài 5: Giải phương trình : $(x^2+2x+7)\sqrt{2x^2-12x+11}=x^3-x^2+11x-21$

Phân tích

Đặt $\sqrt{2x^2-12x+11}=t$, $t\geq 0$, $t^2=2x^2-12x+11$ theo phương trình tổng quát ta đi tìm α có dạng như sau:

$$\alpha t^2+(x^2+2x+7)t-(x^3-x^2+11x-21)-\alpha(2x^2-12x+11)=0.$$

Gán giá trị $x=100$ vào phương trình trên

$$\Leftrightarrow\alpha t^2+10207t-991079-18811\alpha=0.$$

$\Delta=(10207)^2+4\alpha(991079+18811\alpha)\Rightarrow\sqrt{\Delta}=\sqrt{(10207)^2+4\alpha(991079+18811\alpha)}$.

Xét hàm số $f(\alpha)=\sqrt{\Delta}=\sqrt{(10207)^2+4\alpha(991079+18811\alpha)}$.

Dùng chức năng TABLE trong Casio để tìm α sao cho $\alpha\neq 0$ và là một số nguyên với Start = - 9, End = 9, Step = 1 ta thu được kết quả như sau.

$\begin{cases}\alpha=1\\ f(\alpha)=10403\end{cases}\Rightarrow\sqrt{\Delta}=10403=10000+400+3=\left|x^2+4x+3\right|$.

Khi đó phương trình đã cho:

$\Leftrightarrow t^2+(x^2+2x+7)t-(x^3-x^2+11x-21)-(2x^2-12x+11)=0$.

$\Leftrightarrow t^2+(x^2+2x+7)t-(x^3-x^2-x-10)=0$. (2)

$\Delta=(x^2+2x+7)^2+4(x^3-x^2-x-10)=(x^2+4x+3)^2\Rightarrow\sqrt{\Delta}=\left|x^2+4x+3\right|$.

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\dfrac{-(x^2+2x+7)+(x^2+4x+3)}{2}=x-2\\ t=\dfrac{-(x^2+2x+7)-(x^2+4x+3)}{2}=-(x^2+3x+5)\end{array}\right.$$

Bài giải

Điều kiện xác định $\forall x\in\mathbb{R}$.

Ta có: $(x^2+2x+7)\sqrt{2x^2-12x+11}=x^3-x^2+11x-21$

$\Leftrightarrow\left(x^2+3x+5+\sqrt{2x^2-12x+11}\right)\left(x-2-\sqrt{2x^2-12x+11}\right)=0$

$\Leftrightarrow\left(\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{11}{4}+\sqrt{2x^2-12x+11}\right)\left(x-2-\sqrt{2x^2-12x+11}\right)=0$

Vì $\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{11}{4}+\sqrt{2x^2-12x+11}>0\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Do đó $x-2=\sqrt{2x^2-12x+11}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x-2\geq 0\\ (x-2)^2=2x^2-12x+11\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 2\\ x^2-8x+7=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 2\\ \left[\begin{array}{l}x=1\\ x=7\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow x=7$

Kết luận : Vậy nghiệm của phương trình đã cho $x=7$.

Bài 6: Giải phương trình $(x^2-x+10)\sqrt{10x^2-47x+53}=3x^3-11x^2+42x-74$

Phân tích

Đặt $\sqrt{10x^2-47x+53}=t$, $t\geq 0, t^2=10x^2-47x+53$. Lúc này ta đi tìm α theo phương trình tổng quát.

$\alpha t^2+(x^2-x+10)t-(3x^3-11x^2+42x-74)-\alpha(10x^2-47x+53)=0$. (2)

ta gán giá trị của $x=100$ vào phương trình (2)

$\alpha t^2 + 9910t - 2894126 - 95353\alpha = 0$

$\Delta = (9910)^2 + 4\alpha(2894126 + 95353\alpha) \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{(9910)^2 + 4\alpha(2894126 + 95353\alpha)}$.

Xét hàm số $f(\alpha) = \sqrt{\Delta} = \sqrt{(9910)^2 + 4\alpha(2894126 + 95353\alpha)}$.

Dùng chức năng TABLE trong Casio để tìm α sao cho $\alpha \neq 0$ và là một số nguyên với Start = - 9, End = 9, Step = 1 ta thu được kết quả như sau.

$$\begin{cases} \alpha = 1 \\ f(\alpha) = 10496 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{\Delta} = f(\alpha) = 10496 = 10000 + 400 + 90 + 6 = \left|x^2 + 5x - 4\right|$$

Phương trình đã cho

$\Leftrightarrow t^2 + (x^2 - x + 10)t - (3x^3 - 4x^2 - 5x - 21) = 0$.

$\Delta = (x^2 - x + 10)^2 + 4(3x^3 - 4x^2 - 5x - 21) = (x^2 + 5x - 4)^2$.

Nghiệm của phương trình: $\left[\begin{array}{l} t = \dfrac{-(x^2 - x + 10) + (x^2 + 5x - 4)}{2} = 3x - 7 \\ t = \dfrac{-(x^2 - x + 10) - (x^2 + 5x - 4)}{2} = -x^2 - 2x - 7 \end{array}\right.$

Bài giải

Điều kiện xác định $\forall x \in \mathbb{R}$.

Ta có: $(x^2 - x + 10)\sqrt{10x^2 - 47x + 53} = 3x^3 - 11x^2 + 42x - 74$

$\Leftrightarrow \left(3x - 7 - \sqrt{10x^2 - 47x + 53}\right)\left(x^2 + 2x + 7 + \sqrt{10x^2 - 47x + 53}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left(3x - 7 - \sqrt{10x^2 - 47x + 53}\right)\left((x+1)^2 + 6 + \sqrt{10x^2 - 47x + 53}\right) = 0$

Vì $(x+1)^2 + 6 + \sqrt{10x^2 - 47x + 53} > 0 \forall x \in \mathbb{R}$.

Do đó: $3x - 7 = \sqrt{10x^2 - 47x + 53}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 7 \geq 0 \\ (3x-7)^2 = 10x^2 - 47x + 53 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \dfrac{7}{3} \\ x^2 - 5x + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \dfrac{7}{3} \\ \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 4 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x = 4$$

Kết luận: Vậy $x = 4$ là nghiệm của phương trình đã cho.

Bài 7: Giải phương trình $x^2 + 2x - 1 + (x-1)\sqrt{x+2} = 0$.

Phân tích:

Đặt $\sqrt{x+2} = t$, $t \geq 0$ khi đó $t^2 = x + 2$. Lúc này ta đi tìm α theo phương trình tổng quát $\alpha t^2 + (x-1)t + (x^2 + 2x - 1) - \alpha(x+2) = 0$. (2)

Gán $x = 100$ cho phương trình (2) ta có $\alpha t^2 + 99t + (10199 - 102\alpha) = 0$

$\Delta = (101)^2 - 4\alpha(10199 - 102\alpha) \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{(99)^2 - 4\alpha(10199 - 102\alpha)}$

Xét hàm số $f(\alpha)=\sqrt{\Delta}=\sqrt{(99)^2-4\alpha(10199-102\alpha)}$.

Dùng chức năng TABLE trong Casio để tìm α sao cho $\alpha\neq 0$ và là một số nguyên với Start = - 9, End = 9, Step = 1 thu được kết quả như sau:

$\begin{cases}\alpha=-2\\ f(\alpha)=305\end{cases}\Rightarrow f(\alpha)=\sqrt{\Delta}=305=300+5=|3x+5|$

Khi đó phương trình đã cho có dạng:

$-2t^2+(x-1)t+(x^2+2x-1)+2(x+2)=0$.

$\Leftrightarrow -2t^2+(x-1)t+(x^2+4x+3)=0$.

$\Delta=(x-1)^2+8(x^2+4x+3)=9x^2+30x+25=(3x+5)^2$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} t=\dfrac{-(x-1)+(3x+5)}{-4}=-\dfrac{(2x+3)}{2}\\ t=\dfrac{-(x-1)-(3x+5)}{-4}=x+1\end{array}\right.$$

Bài giải

Điều kiện xác định $x\geq -2$.

Ta có: $x^2+2x-1+(x-1)\sqrt{x+2}=0$

$\Leftrightarrow\left(2x+3+2\sqrt{x+2}\right)\left(x+1-\sqrt{x+2}\right)=0$

Trường hợp 1: $x+1=\sqrt{x+2}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x+1\geq 0\\ (x+1)^2=x+2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq -1\\ x^2+x-1=0\end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$

Trường hợp 2: $2x+3=-2\sqrt{x+2}\Leftrightarrow\begin{cases}-2\leq x\leq -\dfrac{3}{2}\\ (2x+3)^2=4(x+2)\end{cases}\Leftrightarrow x=-\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}$

Kết luận : Nghiệm của phương trình đã cho là $x=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}, x=-\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}$.

Bài 8 : Giải phương trình $(x^2-5x)\sqrt{5x^2-3x+6}=2x^3-12x^2+16x-15$

Phân tích

Đặt $\sqrt{5x^2-3x+6}=t$, $t\geq 0$, $t^2=5x^2-3x+6$. Lúc này ta đi tìm hệ số α theo phương trình tổng quát: $\alpha t^2+(x^2-5x)t-(2x^3-12x^2+16x-15)-\alpha(5x^2-3x+6)=0$.

Gán cho giá trị của $x=100$ khi đó phương trình tổng quát đã cho

$\Leftrightarrow \alpha t^2+9500t-1881585-49706\alpha=0$.

$\Delta=(9500)^2+4\alpha(1881585+49706\alpha)\Rightarrow\sqrt{\Delta}=\sqrt{(9500)^2+4\alpha(1881585+49706\alpha)}$

Xét hàm số $f(\alpha)=\sqrt{\Delta}=\sqrt{(9500)^2+4\alpha(1881585+49706\alpha)}$

Dùng chức năng TABLE trong Casio để tìm α sao cho $\alpha \neq 0$ và là một số nguyên với Start = - 9, End = 9, Step = 1 thu được kết quả như sau:

$$\begin{cases}\alpha = 3\\ f(\alpha) = 10706\end{cases} \Rightarrow f(\alpha) = \sqrt{\Delta} = 10706 = 10000 + 700 + 6 = \left|x^2 + 7x + 6\right|.$$

Phương trình đã cho $\Leftrightarrow 3t^2 + (x^2 - 5x)t - (2x^3 + 3x^2 + 7x + 3) = 0$.

$$\Delta = (x^2 - 5x)^2 + 12(2x^3 + 3x^2 + 7x + 3) = (x^2 + 7x + 6)^2 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = x^2 + 7x + 6$$

$$\left[\begin{array}{l} t = \dfrac{-(x^2 - 5x) + (x^2 + 7x + 6)}{2} = 6x + 3\\ t = \dfrac{-(x^2 - 5x) - (x^2 + 7x + 6)}{2} = -x^2 - x - 6\end{array}\right.$$

Bài giải

Điều kiện xác định $\forall x \in \mathbb{R}$. Ta có:

$$(x^2 - 5x)\sqrt{5x^2 - 3x + 6} = 2x^3 - 12x^2 + 16x - 15$$

$$\Leftrightarrow \left(6x + 3 - \sqrt{5x^2 - 3x + 6}\right)\left(x^2 + x + 6 + \sqrt{5x^2 - 3x + 6}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(6x + 3 - \sqrt{5x^2 - 3x + 6}\right)\left(\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{23}{4} + \sqrt{5x^2 - 3x + 6}\right) = 0$$

Vì $\left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{23}{4} + \sqrt{5x^2 - 3x + 6} > 0 \forall x \in \mathbb{R}$.

Do đó: $6x + 3 = \sqrt{5x^2 - 3x + 6} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\dfrac{1}{2}\\ (6x + 3)^2 = 5x^2 - 3x + 6\end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{-39 + \sqrt{1149}}{62}$

Kết luận: Vậy nghiệm của phương trình $x = \dfrac{-39 + \sqrt{1149}}{62}$.

Bài 9 Giải phương trình $(x^2 + x + 1)\sqrt{2x^2 + 8x - 3} = x^3 + 2x^2 - x + 9$

Phân tích

Đặt $\sqrt{2x^2 + 8x - 3} = t$, $t \geq 0$, $t^2 = 2x^2 + 8x - 3$ tới đây ta đi tìm hệ số α theo phương trình tổng quát : $\alpha t^2 + (x^2 + x + 1)t - (x^3 + 2x^2 - x + 9) - \alpha(2x^2 + 8x - 3) = 0$. (3)

Gán $x = 10$ vào phương trình (3) $\Leftrightarrow \alpha t^2 + 111t - (1199 - 277\alpha) = 0$

$$\Delta = (111)^2 + 4\alpha(1199 + 277\alpha) \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{(111)^2 + 4\alpha(1199 + 277\alpha)}.$$

Xét hàm số $f(\alpha) = \sqrt{\Delta} = \sqrt{(111)^2 + 4\alpha(1199 + 277\alpha)}$.

Dùng chức năng TABLE trong Casio để tìm α sao cho $\alpha \neq 0$ và là một số nguyên với Start = - 9, End = 9, Step = 1 thu được kết quả như sau:

$$\begin{cases}\alpha = 1\\ f(\alpha) = 135\end{cases} \Rightarrow f(\alpha) = \sqrt{\Delta} = 135 = 100 + 30 + 5 = (x^2 + 3x + 5)$$

Khi đó phương trình đã cho có dạng:

$t^2+\left(x^2+x+1\right)t-\left(x^3+4x^2+7x+6\right)=0$

$\Delta=\left(x^2+x+1\right)^2+4\left(x^3+4x^2+7x+6\right)=\left(x^2+3x+5\right)^2$.

$\Rightarrow\sqrt{\Delta}=\left|x^2+3x+5\right|\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\dfrac{-\left(x^2+x+1\right)+\left(x^2+3x+5\right)}{2}=x+2\\t=\dfrac{-\left(x^2+x+1\right)-\left(x^2+3x+5\right)}{2}=-x^2-2x-3\end{array}\right.$

Bài giải

Điều kiện xác định $\forall x\in\left(-\infty;\dfrac{-4-\sqrt{22}}{2}\right]\cup\left[\dfrac{-4+\sqrt{22}}{2};+\infty\right)$.

Ta có: $\left(x^2+x+1\right)\sqrt{2x^2+8x-3}=x^3+2x^2-x+9$

$\Leftrightarrow\left(x+2-\sqrt{2x^2+8x-3}\right)\left(x^2+2x+3+\sqrt{2x^2+8x-3}\right)=0$

$\Leftrightarrow\left(x+2-\sqrt{2x^2+8x-3}\right)\left(\left(x+1\right)^2+1+\sqrt{2x^2+8x-3}\right)=0$

Vì $\left(x+1\right)^2+1+\sqrt{2x^2+8x-3}>0\forall x\in\left(-\infty;\dfrac{-4-\sqrt{22}}{2}\right]\cup\left[\dfrac{-4+\sqrt{22}}{2};+\infty\right)$

Do đó $x+2=\sqrt{2x^2+8x-3}\Leftrightarrow\begin{cases}x+2\ge0\\\left(x+2\right)^2=2x^2+8x-3\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge-2\\x^2+4x-7=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge-2\\\left[\begin{array}{l}x=-2+\sqrt{11}\\x=-2-\sqrt{11}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow x=-2+\sqrt{11}$ (Thỏa mãn điều kiện)

Kết luận: Vậy nghiệm của phương trình là $x=-2+\sqrt{11}$.

Bài 10: Giải phương trình $\left(x^2-5\right)\sqrt{2x^2-x+11}=x^3+16x-21$

Phân tích

Đặt $\sqrt{2x^2-x+11}=t$, $t\ge0$, $t^2=2x^2-x+11$ tới đây ta đi tìm hệ số α theo phương trình tổng quát:

$\alpha t^2+\left(x^2-5\right)t-\left(x^3+16x-21\right)-\alpha\left(2x^2-x+11\right)=0$.

Gán giá trị cho $x=100$ vào phương trình tổng quát

$\Leftrightarrow\alpha t^2+9995t-1001579-19911\alpha=0$.

$\Delta=\left(9995\right)^2+4\alpha\left(1001579+19911\alpha\right)\Rightarrow\sqrt{\Delta}=\sqrt{\left(9995\right)^2+4\alpha\left(1001579+19911\alpha\right)}$.

Xét hàm số $f\left(\alpha\right)=\sqrt{\Delta}=\sqrt{\left(9995\right)^2+4\alpha\left(1001579+19911\alpha\right)}$.

Dùng chức năng TABLE trong Casio để tìm α sao cho $\alpha\ne0$ và là một số nguyên với Start = - 9, End = 9, Step = 1 thu được kết quả như sau:

$\begin{cases}\alpha=3\\ f(\alpha)=10613\end{cases}\Rightarrow f(\alpha)=\sqrt{\Delta}=10613=10000+600+13=(x^2+6x+13)$

Phương trình đã cho $\Leftrightarrow 3t^2+(x^2-5)t-(x^3+6x^2+13x+12)=0$.

$\Delta=(x^2-5)^2+12(x^3+6x^2+13x+12)=(x^2+6x+13)^2\Rightarrow\sqrt{\Delta}=(x^2+6x+13)$

$$\Rightarrow\sqrt{\Delta}=(x^2+6x+13)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\dfrac{-(x^2-5)+(x^2+6x+13)}{6}=x+3\\ t=\dfrac{-(x^2-5)-(x^2+6x+13)}{6}=\dfrac{-2x^2-6x-8}{6}\end{array}\right.$$

Bài giải

Điều kiện xác định $\forall x\in\mathbb{R}$.

Ta có: $(x^2-5)\sqrt{2x^2-x+11}=x^3+16x-21$

$\Leftrightarrow\left(x+3-\sqrt{2x^2-x+11}\right)\left(2x^2+6x+8+\sqrt{2x^2-x+11}\right)=0$

$\Leftrightarrow\left(x+3-\sqrt{2x^2-x+11}\right)\left(2\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{2}+\sqrt{2x^2-x+11}\right)=0$

Vì $2\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{2}+\sqrt{2x^2-x+11}>0\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Do đó: $x+3=\sqrt{2x^2-x+11}\Leftrightarrow\begin{cases}x+3\ge0\\(x+3)^2=2x^2-x+11\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{7+\sqrt{37}}{2}\\ x=\dfrac{7-\sqrt{37}}{2}\end{array}\right.$

Kết luận: Nghiệm của phương trình $x=\left\{\frac{7-\sqrt{37}}{2};\frac{7+\sqrt{37}}{2}\right\}$.

Bài 11: Giải phương trình sau:

$15x^3+x^2-3x+2-(15x^2+x-5)\sqrt{x^2+x+1}=0$

Phân tích

Đặt $\sqrt{x^2+x+1}=t,\ t\ge0,\ t^2=x^2+x+1$ tới đây ta đi tìm hệ số α theo phương trình tổng quát:

$\alpha t^2-(15x^2+x-5)t+15x^3+x^2-3x+2-\alpha(x^2+x+1)=0$.

Gán giá trị cho $x=100$ vào phương trình tổng quát

$\Leftrightarrow\ \alpha t^2-150095t+15009702-10101\alpha=0$.

$\Delta=(150095)^2-4\alpha(15009702-10101\alpha)\Rightarrow\sqrt{\Delta}=\sqrt{(150095)^2-4\alpha(15009702-10101\alpha)}$.

Xét hàm số $f(\alpha)=\sqrt{\Delta}=\sqrt{(150095)^2-4\alpha(15009702-10101\alpha)}$.

Dùng chức năng TABLE trong Casio để tìm α sao cho $\alpha\ne0$ và là một số nguyên với Start = - 9, End = 9, Step = 1 thu được kết quả như sau:

$\begin{cases} \alpha = 2 \\ f(\alpha) = 149695 \end{cases} \Rightarrow f(\alpha) = \sqrt{\Delta} = 149695 = 140000 + 9600 + 95$

$\Rightarrow \sqrt{\Delta} = 140000 + 10000 - 400 + 100 - 5 = 150000 - 300 - 5 = |15x^2 - 3x - 5|$

Phương trình đã cho

$\Leftrightarrow 2t^2 - (15x^2 + x - 5)t + 15x^3 - x^2 - 5x = 0$.

$\Delta = (15x^2 + x - 5)^2 - 8(15x^3 - x^2 - 5x) = (15x^2 - 3x - 5)^2 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = |15x^2 - 3x - 5|$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{15x^2 + x - 5 + (15x^2 - 3x - 5)}{4} = \dfrac{15x^2 - x - 5}{2} \\ t = \dfrac{15x^2 + x - 5 - (15x^2 - 3x - 5)}{4} = x \end{array}\right.$

Bài giải

Điều kiện xác định $\forall x \in \mathbb{R}$.

Ta có: $15x^3 + x^2 - 3x + 2 - (15x^2 + x - 5)\sqrt{x^2 + x + 1} = 0$

$\Leftrightarrow \left(15x^2 - x - 5 - 2\sqrt{x^2 + x + 1}\right)\left(x - \sqrt{x^2 + x + 1}\right) = 0$ (*)

Tiếp tục sử dụng kỹ thuật tách nhân tử bằng đặt ẩn phụ không hoàn toàn ta được:

(*) $\Leftrightarrow 2\left(2x - \sqrt{x^2 + x + 1}\right)\left(10x + 2 + 5\sqrt{x^2 + x + 1}\right)\left(x - \sqrt{x^2 + x + 1}\right) = 0$

Trường hợp 1: $2x - \sqrt{x^2 + x + 1} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ 3x^2 - x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{1 + \sqrt{13}}{6}$.

Trường hợp 2: $10x + 2 + 5\sqrt{x^2 + x + 1} = 0 \Leftrightarrow 5\sqrt{x^2 + x + 1} = -10x - 2$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 25(x^2 + x + 1) = (10x + 2)^2 \\ 10x + 2 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 75x^2 + 15x - 21 = 0 \\ 10x + 2 \le 0 \end{cases}$

$\Rightarrow x = \dfrac{-1 - \sqrt{29}}{10}$ (Thỏa mãn điều kiện).

Trường hợp 3: $x = \sqrt{x^2 + x + 1} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x^2 = x^2 + x + 1 \end{cases}$ (vô nghiệm)

Kết luận: Nghiệm của phương trình $x = \dfrac{1 + \sqrt{13}}{6} \vee x = \dfrac{-1 - \sqrt{29}}{10}$.

Chủ đề 6:
PHƯƠNG PHÁP XÉT TỔNG HIỆU

I. Đặt vấn đề:

- Trong các chủ đề trước, chúng ta đã giải các phương trình, bất phương trình và hệ phương trình bằng các phương pháp nâng lũy thừa, tạo biểu thức liên hợp với sự hỗ trợ của máy tính CASIO.
- Trong phần này, chúng ta sẽ tiếp tục tiếp cận phương pháp nhân liên hợp tiếp theo, chuyên sử dụng cho các bài toán có hai căn bậc hai cộng với nhau.

II. Phương pháp xét tổng hiệu là gì?

- Cho phương trình có dạng $\sqrt{A}+\sqrt{B}=C$ (1).
- Xét $\sqrt{A}-\sqrt{B}=\dfrac{A-B}{\sqrt{A}+\sqrt{B}}=\dfrac{A-B}{C}$ (2).
- Khi đó chỉ cần cộng hoặc trừ vế với vế của (1) và (2) ta sẽ khử được một trong hai căn $\sqrt{A}$ hoặc $\sqrt{B}$.

III. Ví dụ minh họa.

Ví dụ: Giải phương trình: $\sqrt{x^2-3x+3}+\sqrt{x^2-5x+1}=x+1$

Bài giải

Điều kiện xác định: $x\ge -1$.

Nhận xét $x=-1$ không phải là nghiệm của phương trình.

Xét $\sqrt{x^2-3x+3}-\sqrt{x^2-5x+1}=\dfrac{\left(x^2-3x+3\right)-\left(x^2-5x+1\right)}{\sqrt{x^2-3x+3}+\sqrt{x^2-5x+1}}=\dfrac{2x+2}{x+1}=2$

Do đó ta có: $\begin{cases}\sqrt{x^2-3x+3}+\sqrt{x^2-5x+1}=x+1\\ \sqrt{x^2-3x+3}-\sqrt{x^2-5x+1}=2\end{cases}$

Cộng hai vế của hai phương trình ta được:

$2\sqrt{x^2-3x+3}=x+3\Rightarrow\begin{cases}x\ge -1\\ 4\left(x^2-3x+3\right)=x^2+6x+9\end{cases}\Rightarrow x=3\pm 2\sqrt{2}$

Kết luận: Phương trình có hai nghiệm phân biệt $x=3\pm 2\sqrt{2}$

IV. Bài tập áp dụng.

Bài 1: Giải phương trình: $\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{2x+1}=x+1$

Bài giải

Điều kiện xác định: $x\ge -\dfrac{1}{2}$

Xét $\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{2x+1}=\dfrac{x^2+2x-2x-1}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{2x+1}}=\dfrac{x^2-1}{x+1}=x-1$

Do đó ta có: $\begin{cases}\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{2x+1}=x-1\\ \sqrt{x^2+2x}+\sqrt{2x+1}=x+1\end{cases}$

Cộng hai vế của hai phương trình ta được: $2\sqrt{x^2+2x}=2x$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+2x}=x \Leftrightarrow \begin{cases}x\ge 0\\ x^2+2x=x^2\end{cases} \Rightarrow x=0$ (Thỏa mãn điều kiện).

Kết luận: Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=0$.

Bài 2: Giải phương trình: $\sqrt{x^3+x^2+1}+\sqrt{x^2+2}=x^2+x+1$

Bài giải

Điều kiện xác định: $x^3+x^2+1\ge 0 \Rightarrow x^3+x^2+4>0 \Rightarrow x>-2$

Xét: $\sqrt{x^3+x^2+1}-\sqrt{x^2+2}=\dfrac{\left(x^3+x^2+1\right)-\left(x^2+2\right)}{\sqrt{x^3+x^2+1}+\sqrt{x^2+2}}$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^3+x^2+1}-\sqrt{x^2+2}=\dfrac{x^3-1}{x^2+x+1}=x-1$

Do đó ta có: $\begin{cases}\sqrt{x^3+x^2+1}+\sqrt{x^2+2}=x^2+x+1\\ \sqrt{x^3+x^2+1}-\sqrt{x^2+2}=x-1\end{cases}$

Trừ hai vế của hai phương trình ta được:

$2\sqrt{x^2+2}=\left(x^2+x+1\right)-\left(x-1\right) \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2+2}=x^2+2$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+2}=2 \Leftrightarrow x^2=2 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{2}$ (Thỏa mãn điều kiện).

Kết luận: Vậy phương trình có hai nghiệm phân biệt $x=\pm\sqrt{2}$.

Bài 3: Giải phương trình: $\sqrt{x+8\sqrt{x}}+\sqrt{x+7\sqrt{x}+1}=\sqrt[4]{x}+1$

Bài giải

Điều kiện xác định: $x\ge 0$.

Xét: $\sqrt{x+8\sqrt{x}}-\sqrt{x+7\sqrt{x}+1}=\dfrac{\left(x+8\sqrt{x}\right)-\left(x+7\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt{x+8\sqrt{x}}+\sqrt{x+7\sqrt{x}+1}}$

$\Leftrightarrow \sqrt{x+8\sqrt{x}}-\sqrt{x+7\sqrt{x}+1}=\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[4]{x}+1}=\dfrac{\left(\sqrt[4]{x}+1\right)\left(\sqrt[4]{x}-1\right)}{\sqrt[4]{x}+1}=\sqrt[4]{x}-1$

Do đó ta có: $\begin{cases}\sqrt{x+8\sqrt{x}}+\sqrt{x+7\sqrt{x}+1}=\sqrt[4]{x}+1\\ \sqrt{x+8\sqrt{x}}-\sqrt{x+7\sqrt{x}+1}=\sqrt[4]{x}-1\end{cases}$

Trừ hai vế của hai phương trình ta được:

$2\sqrt{x+7\sqrt{x}+1}=2 \Leftrightarrow \sqrt{x+7\sqrt{x}+1}=1 \Leftrightarrow x+7\sqrt{x}+1=1 \Leftrightarrow x=0$.

Kết luận: Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=0$.

Bài 4: Giải phương trình: $\sqrt{x^2+16}+2\sqrt{x^2-3x+4}=3(4-x)\left(\sqrt{x+1}+1\right)$

Bài giải

Điều kiện xác định: $-1\le x<4$.

Xét: $\sqrt{x^2+16}-2\sqrt{x^2-3x+4}=\dfrac{\left(x^2+16\right)-4\left(x^2-3x+4\right)}{\sqrt{x^2+16}+2\sqrt{x^2-3x+4}}$

$\Rightarrow \sqrt{x^2+16}-2\sqrt{x^2-3x+4}=\dfrac{-3x^2+12x}{3(4-x)\left(\sqrt{x+1}+1\right)}=\dfrac{-3x(x-4)}{3(4-x)\left(\sqrt{x+1}+1\right)}$

Do đó ta có: $\begin{cases}\sqrt{x^2+16}+2\sqrt{x^2-3x+4}=3(4-x)\left(\sqrt{x+1}+1\right)\\ \sqrt{x^2+16}-2\sqrt{x^2-3x+4}=\sqrt{x+1}-1\end{cases}$

Cộng hai vế của hai phương trình ta được:

$2\sqrt{x^2+16}=(13-3x)\sqrt{x+1}+11-3x$

$\Leftrightarrow 2\left(\sqrt{x^2+16}-5\right)=(13-3x)\left(\sqrt{x+1}-2\right)+27-9x$

$\Leftrightarrow 2\left(\sqrt{x^2+16}-5\right)+(3x-13)\left(\sqrt{x+1}-2\right)+9(x-3)=0$

$\Leftrightarrow \dfrac{2\left(x^2-9\right)}{\sqrt{x^2+16}+5}+\dfrac{(3x-13)(x-3)}{\sqrt{x+1}+2}+9(x-3)=0$

$\Leftrightarrow (x-3)\left[\dfrac{2(x+3)}{\sqrt{x^2+16}+5}+\dfrac{3x-13}{\sqrt{x+1}+2}+9\right]=0$

$\Leftrightarrow (x-3)\left[\dfrac{2(x+3)}{\sqrt{x^2+16}+5}+\dfrac{3x+5+9\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}+2}\right]=0$ (*).

Vì $x\ge -1\Rightarrow \dfrac{2(x+3)}{\sqrt{x^2+16}+5}+\dfrac{3x+5+9\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}+2}>0$.

Do đó (*) $\Rightarrow x=3$ (Thỏa mãn điều kiện).

Kết luận: Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=3$.

Bài 5: Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\sqrt{y-3x+4}+\sqrt{y+5x+4}=4\\ \sqrt{5y+3}-\sqrt{7x-2}=2x-1-4y\end{cases}$

Bài giải

Điều kiện xác định: $x\ge\dfrac{2}{7}, y\ge -\dfrac{3}{5}$.

Xét: $\sqrt{y-3x+4}-\sqrt{y+5x+4}=\dfrac{(y-3x+4)-(y+5x+4)}{\sqrt{y-3x+4}+\sqrt{y+5x+4}}$

$\Rightarrow \sqrt{y-3x+4}-\sqrt{y+5x+4}=\dfrac{-8x}{4}=-2x$

Do đó ta có: $\begin{cases}\sqrt{y-3x+4}+\sqrt{y+5x+4}=4\\ \sqrt{y-3x+4}-\sqrt{y+5x+4}=-2x\end{cases}$

Cộng hai vế của hai phương trình ta được: $2\sqrt{y-3x+4}=4-2x$.

$\Leftrightarrow \sqrt{y-3x+4}=2-x \Leftrightarrow \begin{cases}x\le 2\\ y-3x+4=(2-x)^2\end{cases} \Rightarrow y=x^2-x$.

Thay $y=x^2-x$ vào phương trình thứ hai ta được:

$\sqrt{5x^2-5x+3}-\sqrt{7x-2}+4x^2-6x+1=0$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{5x^2-5x+3}-(x+1)\right)+\left(2x-\sqrt{7x-2}\right)+4x^2-7x+2=0$

$\Leftrightarrow \left(4x^2-7x+2\right)\left(\dfrac{1}{\sqrt{5x^2-5x+3}+x+1}+\dfrac{1}{2x+\sqrt{7x-2}}+1\right)=0$ (*)

Với $x\ge \dfrac{2}{7}$ ta có:

$\begin{cases}\sqrt{5x^2-5x+3}+x+1>0\\ 2x+\sqrt{7x-2}\ge 7>0\end{cases} \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{5x^2-5x+3}+x+1}+\dfrac{1}{2x+\sqrt{7x-2}}+1>0$.

Do đó (*) $\Rightarrow \begin{cases}4x^2-7x+2=0\\ x\ge \dfrac{2}{7}\end{cases} \Rightarrow x=\dfrac{7\pm\sqrt{17}}{8} \Rightarrow y=\dfrac{5\pm 4\sqrt{17}}{32}$.

Kết luận: Vậy hệ phương trình có hai cặp nghiệm phân biệt là:

$x=\dfrac{7\pm\sqrt{17}}{8}$, $y=\dfrac{5\pm 4\sqrt{17}}{32}$

Bài 6: Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x^2+45+\sqrt{7y^2-29y-5}=y^2+10x\\ \sqrt{5x+y-5}+\sqrt{1-x+y}=6\end{cases}$

Bài giải

Điều kiện xác định: $y\ge \dfrac{29+3\sqrt{109}}{14} \vee y\le \dfrac{29-3\sqrt{109}}{14}$.

Xét: $\sqrt{5x+y-5}-\sqrt{1-x+y}=\dfrac{(5x+y-5)-(1-x+y)}{\sqrt{5x+y-5}+\sqrt{1-x+y}}$

$\Rightarrow \sqrt{5x+y-5}-\sqrt{1-x+y}=\dfrac{6(x-1)}{6}=x-1$.

Do đó ta có: $\begin{cases}\sqrt{5x+y-5}-\sqrt{1-x+y}=x-1\\ \sqrt{5x+y-5}+\sqrt{1-x+y}=6\end{cases}$.

Trừ hai vế của hai phương trình ta được: $2\sqrt{1-x+y}=7-x$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x\le 7\\ 4(1-x+y)=(7-x)^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\le 7\\ 4y=(x-5)^2+20\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x\le 7, y\ge 5\\ 4y-45=x^2-10x\end{cases}$

Thay $x^2-10x=4y-45$ vào phương trình đầu ta được:

$x^2+45+\sqrt{7y^2-29y-5}=y^2+10x \Leftrightarrow x^2-10x+45+\sqrt{7y^2-29y-5}=y^2$

$\Leftrightarrow 4y-45+45+\sqrt{7y^2-29y-5}=y^2 \Leftrightarrow y^2-4y=\sqrt{7y^2-29y-5}$ (1).

Vì $y\ge 5 \Rightarrow y^2-4y>0$ do đó bình phương hai vế (1) ta được:

$\left(y^2-4y\right)^2=7y^2-29y-5 \Leftrightarrow (y-5)\left(y^3-3y^2-6y-1\right)=0$ (*).

Xét hàm số $f(y)=y^3-3y^2-6y-1$ với $y\ge 5$.

Ta có: $f'(y)=3y^2-6y-6=3(y-1)^2-9\ge 3(5-1)^2-9>0\forall y\ge 5$.

Do đó $f(y)$ là hàm số đồng biến trong $[5;+\infty)$.

Do đó ta có $f(y)\ge f(5)\Rightarrow y^3-3y^2-6y-1\ge 19>0\forall y\ge 5$.

Như vậy (*) $\Rightarrow y=5$ (Thỏa mãn điều kiện) $\Rightarrow x^2-10x+45=20\Rightarrow x=5$.

Kết luận: Hệ phương trình có cặp nghiệm duy nhất $x=y=5$.

Bài 7: Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\sqrt{x+2y^2}+\sqrt{x+y^2+1}=y+1\\ \sqrt{\left(x^2+1\right)+2(x+1)\sqrt{x^2+1}}=2y\end{cases}$

Bài giải

Điều kiện xác định: $y\ge 0$.

Xét: $\sqrt{x+2y^2}-\sqrt{x+y^2+1}=\dfrac{x+2y^2-\left(x+y^2+1\right)}{\sqrt{x+2y^2}+\sqrt{x+y^2+1}}$

$\Rightarrow \sqrt{x+2y^2}-\sqrt{x+y^2+1}=\dfrac{y^2-1}{y+1}=y-1$.

Do đó ta có: $\begin{cases}\sqrt{x+2y^2}+\sqrt{x+y^2+1}=y+1\\ \sqrt{x+2y^2}-\sqrt{x+y^2+1}=y-1\end{cases}$

Trừ hai vế của hai phương trình trên ta được:

$2\sqrt{x+y^2+1}=2\Leftrightarrow \sqrt{x+y^2+1}=1\Leftrightarrow x+y^2+1=1\Leftrightarrow x=-y^2\le 0$

Thay $x=-y^2$ vào phương trình thứ hai ta được:

$\sqrt{\left(y^4+1\right)+2\left(-y^2+1\right)\sqrt{y^4+1}}=2y \Leftrightarrow \left(y^4+1\right)+2\left(-y^2+1\right)\sqrt{y^4+1}=4y^2$

Đặt $y^2=t\ge 0$ ta có: $t^2-4t+1-2(t-1)\sqrt{t^2+1}=0$

$\Leftrightarrow -3t^2+1+2(t-1)\left(2t-\sqrt{t^2+1}\right)=0$

$\Leftrightarrow -\left(3t^2-1\right)+2(t-1)\dfrac{3t^2-1}{2t+\sqrt{t^2+1}}=0 \Leftrightarrow \left(3t^2-1\right)\dfrac{-2-\sqrt{t^2+1}}{2t+\sqrt{t^2+1}}=0$ (*).

Vì $t \geq 0 \Rightarrow \frac{-2-\sqrt{t^2+1}}{2t+\sqrt{t^2+1}} < 0$ do đó (*) $\Rightarrow 3t^2 - 1 = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Do đó $y^2 = t = \frac{1}{\sqrt{3}}, y \geq 0; x = -y^2 = -\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow x = -\frac{1}{\sqrt{3}}, y = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$.

Kết luận: Vậy hệ phương trình có cặp nghiệm duy nhất là $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}, y = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$.

Bài 8: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x\sqrt{2-y^2} + y\sqrt{2-x^2} = 2 \\ \sqrt{x^2-x+2} = y^2 + 2xy + 2x - 5 + \sqrt{x+1} \end{cases}$

Bài giải

Điều kiện xác định: $-\sqrt{2} \leq x, y \leq \sqrt{2}$.

Xét: $x\sqrt{2-y^2} - y\sqrt{2-x^2} = \frac{x^2(2-y^2) - y^2(2-x^2)}{x\sqrt{2-y^2} + y\sqrt{2-x^2}}$

$\Leftrightarrow x\sqrt{2-y^2} - y\sqrt{2-x^2} = \frac{2x^2 - x^2y^2 - 2y^2 + x^2y^2}{2} = x^2 - y^2$

Do đó ta có: $\begin{cases} x\sqrt{2-y^2} + y\sqrt{2-x^2} = 2 \\ x\sqrt{2-y^2} - y\sqrt{2-x^2} = x^2 - y^2 \end{cases}$

Cộng hai vế của hai phương trình ta được:

$2x\sqrt{2-y^2} = x^2 + 2 - y^2 \Leftrightarrow x^2 - 2x\sqrt{2-y^2} + (2-y^2) = 0 \Leftrightarrow \left(x - \sqrt{2-y^2}\right)^2 = 0$

Do đó $x = \sqrt{2-y^2} \geq 0$. Như vậy ta có: $x^2 + y^2 = 2$ và $0 \leq x \leq \sqrt{2}$.

Tương tự ta cũng có: $y = \sqrt{2-x^2} \Rightarrow 0 \leq y \leq \sqrt{2}$.

Xét phương trình thứ hai: $\sqrt{x^2-x+2} = y^2 + 2xy + 2x - 5 + \sqrt{x+1}$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2-x+2} = y^2 + 2xy + 2x + 2 - 7 + \sqrt{x+1}$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2-x+2} = y^2 + 2xy + 2x + x^2 + y^2 - 7 + \sqrt{x+1}$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2-x+2} = (x+y)^2 + 2x + y^2 - 7 + \sqrt{x+1}$

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có: $(x+y)^2 \leq 2(x^2+y^2) \Rightarrow (x+y)^2 \leq 4$

Do đó $\sqrt{x^2-x+2} \leq 4 + 2x + y^2 - 7 + \sqrt{x+1} \Rightarrow \sqrt{x^2-x+2} \leq 2x + y^2 - 3 + \sqrt{x+1}$

$\Rightarrow \sqrt{x^2-x+2} \leq 2x + (2-x^2) - 3 + \sqrt{x+1} \Leftrightarrow \sqrt{x^2-x+2} \leq 2x - x^2 - 1 + \sqrt{x+1}$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 + \sqrt{x^2-x+2} - \sqrt{x+1} \leq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + \frac{x^2-x+2-x-1}{\sqrt{x^2-x+2}+\sqrt{x+1}} \leq 0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 + \frac{(x-1)^2}{\sqrt{x^2-x+2}+\sqrt{x+1}} \leq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^2-x+2}+\sqrt{x+1}}\right) \leq 0$

Vì $1+\dfrac{1}{\sqrt{x^2-x+2}+\sqrt{x+1}}>0\forall x\geq -1$ do đó ta có $(x-1)^2\leq 0$.

Mặt khác vì $(x-1)^2\geq 0\forall x\in\mathbb{R}$ do đó $(x-1)^2=0\Leftrightarrow x=1\Rightarrow y=\sqrt{2-x^2}=1$.

Kết luận: Vậy hệ phương trình có cặp nghiệp duy nhất $x=y=1$.

Bài 9: Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\sqrt{2x+y}+\sqrt{2x-y+4}=4\\ x^3+4x^2+2y^2-4y(x+1)+3=0\end{cases}$

Bài giải

Xét $\sqrt{2x+y}-\sqrt{2x-y+4}=\dfrac{(2x+y)-(2x-y+4)}{\sqrt{2x+y}+\sqrt{2x-y+4}}$

$\Rightarrow\sqrt{2x+y}-\sqrt{2x-y+4}=\dfrac{2(y-2)}{4}=\dfrac{y-2}{2}$

Do đó ta có: $\begin{cases}\sqrt{2x+y}+\sqrt{2x-y+4}=4\\ \sqrt{2x+y}-\sqrt{2x-y+4}=\dfrac{y-2}{2}\end{cases}$

Cộng hai vế của hai phương trình trên ta được $2\sqrt{2x+y}=\dfrac{y+6}{2}$

$\Rightarrow 16(2x+y)=(y+6)^2\Leftrightarrow 32x=y^2-4y+36\Leftrightarrow x=\dfrac{(y-2)^2}{32}+1\geq 1$.

Mặt khác trong phương trình thứ hai ta nhận thấy:

$x^3+4x^2+2y^2-4y(x+1)+3=0\Leftrightarrow x^3-1+(4x^2-4xy+y^2)+(y^2-4y+4)=0$

$\Leftrightarrow(x^3-1)+(2x-y)^2+(y-2)^2=0$

Vì $x\geq 1,(2x-y)^2+(y-2)^2\geq 0\Rightarrow(x^3-1)+(2x-y)^2+(y-2)^2\geq 0$

Do đó $(x^3-1)+(2x-y)^2+(y-2)^2=0\Leftrightarrow x=1,y=2$.

Kết luận: Hệ phương trình có cặp nghiệm duy nhất $x=1,y=2$.

Chủ đề 7:
HÀM ĐẶC TRƯNG GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH

I. Đặt vấn đề:

- Trong các bài toán phương trình, bất phương trình và hệ phương trình, có rất nhiều bài toán mà ở đó chúng ta nhìn thấy hai vế của phương trình, bất phương trình có cách biểu diễn "gần giống nhau". Tuy nhiên từ chỗ "gần giống nhau" đó ta chỉ ra được mối quan hệ của các nhóm biểu thức là không phải điều đơn giản.
- Trong chủ đề này chúng ta sẽ tập trung phân tích các phương trình, bất phương trình và hệ phương trình có tính chất như trên và ta gọi là "Phương pháp hàm đặc trưng".

II. Kiến thức căn bản:

- Nếu $f(x)$ là hàm số đơn điệu và liên tục trên tập xác định D đồng thời $\begin{cases} f(a)=f(b) \\ a,b\in D \end{cases}$ thì ta có $a=b$.
- Bất phương trình: $f(x)>f(y), f'(x)\geq 0, \forall x,y\in D \Leftrightarrow x>y$.
- Bất phương trình: $f(x)>f(y), f'(x)\leq 0, \forall x,y\in D \Leftrightarrow x<y$.
- Bất phương trình: $f(x)<f(y), f'(x)\leq 0, \forall x,y\in D \Leftrightarrow x>y$.
- Bất phương trình: $f(x)<f(y), f'(x)\geq 0, \forall x,y\in D \Leftrightarrow x<y$.
- Bất phương trình: $f(x)\geq f(y), f'(x)\geq 0, \forall x,y\in D \Leftrightarrow x\geq y$.
- Bất phương trình: $f(x)\geq f(y), f'(x)\leq 0, \forall x,y\in D \Leftrightarrow x\leq y$.
- Bất phương trình: $f(x)\leq f(y), f'(x)\leq 0, \forall x,y\in D \Leftrightarrow x\geq y$.
- Bất phương trình: $f(x)\leq f(y), f'(x)\geq 0, \forall x,y\in D \Leftrightarrow x\leq y$.

  Chú ý: Không phải lúc nào hai biến x,y cũng có cùng một tập xác định.

  Giả sử $x\in D_1, y\in D_2$, khi đó xét hàm đặc trưng, ta sử dụng hàm số $f(t)$ trong đó t đại diện cho hai biến x,y đồng thời $t\in D$ với $D=D_1\cup D_2$.

- Ví dụ 1: $x\in\mathbb{R}, y>0 \Rightarrow t\in\mathbb{R}$.
- Ví dụ 2: $x>0, y\geq 0 \Rightarrow t\geq 0$.
- Ví dụ 3: $x\in[2;4], y\in[1;3] \Rightarrow t\in[1;4]$.

III. Bài tập vận dụng:

Bài 1: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3-2y+1=0 \\ (3-x)\sqrt{2-x}-y\sqrt{8y-4}=0 \end{cases}$

Phân tích

Xét phương trình $(3-x)\sqrt{2-x}-y\sqrt{8y-4}=0 \Leftrightarrow (3-x)\sqrt{2-x}=y\sqrt{8y-4}$.

Đây là một phương trình ta nhìn thấy hai vế có nhóm biểu thức được sắp xếp gần giống nhau. Tuy nhiên để chắc chắn sẽ đưa được về hàm đặc trưng, ta cần đánh giá về mối quan hệ của các biến x,y.

Xét $y=100$, ta có phương trình trở thành: $(3-x)\sqrt{2-x}=100\sqrt{796}$.

SHIFT CALC với $x=1$ ta được nghiệm: $x=-197$.

Để tìm mối quan hệ giữa x,y ta cần liên hệ với cách biểu diễn của -197 với 100: $-197=3-2.100$. Do đó: $x=-197=3-2y$.

Như vậy: $2-x=2y-1$. Do đó ta sẽ biến đổi phương trình hai vế dạng hàm số đặc trưng đại diện cho hai biến này.

Bài giải

Điều kiện xác định: $x\le 2, y\ge \frac{1}{2}$.

Ta có: $(3-x)\sqrt{2-x}-y\sqrt{8y-4}=0 \Leftrightarrow (3-x)\sqrt{2-x}=2y\sqrt{2y-1}$

$\Leftrightarrow (2-x)\sqrt{2-x}+\sqrt{2-x}=(2y-1)\sqrt{2y-1}+\sqrt{2y-1}$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{2-x}\right)^3+\sqrt{2-x}=\left(\sqrt{2y-1}\right)^3+\sqrt{2y-1}$.

Xét hàm đặc trưng $f(t)=t^3+t$ với $t\in\mathbb{R}$. Khi đó ta có: $f'(t)=3t^2+1>0$.

Vậy: $f(t)$ là hàm đồng biến và liên tục trên $\mathbb{R}$.

Vậy: $f\left(\sqrt{2-x}\right)=f\left(\sqrt{2y-1}\right)\Leftrightarrow 2-x=2y-1\Leftrightarrow x=3-2y$.

Thay $2y=3-x$ vào phương trình 1 ta được:

$x^3-2y+1=0\Rightarrow x^3-(3-x)\boxplus 1=0\Leftrightarrow x^3+x-2=0\Leftrightarrow (x-1)\left(x^2+x+2\right)=0$

Vì $x^2+x+2>0\forall x$ do đó $x=1$ (Thỏa mãn điều kiện) $\Rightarrow y=1$.

Kết luận: Hệ phương trình có cặp nghiệm duy nhất $x=y=1$.

Bài 2: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}\sqrt[3]{x+\sqrt{y-x}}+\sqrt{y-x}=x^3\\ x^4+3x+\sqrt{\sqrt{y-x}-x^3+x^2+4x}=x\sqrt{y-x}+6\end{cases}$$

Bài giải

Điều kiện: $y\ge x$.

Cộng thêm x ở 2 vế của phương trình 1 ta được:

$\sqrt[3]{x+\sqrt{y-x}}+\sqrt{y-x}=x^3\Leftrightarrow \sqrt[3]{x+\sqrt{y-x}}+x+\sqrt{y-x}=x^3+x$

Xét hàm đặc trưng $f(t)=t^3+t$ với $t\in\mathbb{R}$.

Ta có: $f'(t)=3t^2+1>0$ với mọi giá trị $t\in\mathbb{R}$.

Do đó $f(t)$ là hàm đồng biến và liên tục với $t\in\mathbb{R}$.

Vì vậy $\sqrt[3]{x+\sqrt{y-x}}+x+\sqrt{y-x}=x^3+x\Leftrightarrow f\left(\sqrt[3]{x+\sqrt{y-x}}\right)=f(x)$

$\Leftrightarrow \sqrt[3]{x+\sqrt{y-x}}=x \Leftrightarrow x+\sqrt{y-x}=x^3 \Leftrightarrow \sqrt{y-x}=x^3-x$.

Thay vào phương trình thứ hai ta được:

$x^4+3x+\sqrt{x^3-x-x^3+x^2+4x}-x\left(x^3-x\right)-6=0$

$\Leftrightarrow \left(x^2+3x-4\right)+\left(\sqrt{x^2+3x}-2\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2+3x}-2\right)\left(\sqrt{x^2+3x}+2\right)+\left(\sqrt{x^2+3x}-2\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2+3x}-2\right)\left(\sqrt{x^2+3x}+3\right)=0$

Do đó $\sqrt{x^2+3x}=2 \Rightarrow \begin{cases} x^2+3x=4 \\ x^3-x\geq 0 \end{cases} \Rightarrow x=1 \Rightarrow \sqrt{y-1}=0 \Rightarrow y=1$

Kết luận: Hệ phương trình có một cặp nghiệm duy nhất $x=y=1$.

Bài 3: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x+1}+\sqrt{x+3}=\sqrt{y-3}+\sqrt{y-5} \\ x+y+x^2+y^2=80 \end{cases}$

Bài giải

Điều kiện xác định: $x\geq -1, y\geq 5$.

Ta có: $\sqrt{x+1}+\sqrt{x+3}=\sqrt{y-3}+\sqrt{y-5}$

$\Leftrightarrow \sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)+2}=\sqrt{y-5}+\sqrt{(y-5)+2}$.

Xét hàm số $f(t)=\sqrt{t}+\sqrt{t+2}, t\geq 0$. Ta có: $f'(t)=\frac{1}{2\sqrt{t}}+\frac{1}{2\sqrt{t+3}}>0, \forall t>0$.

Vậy $f(t)$ đồng biến và liên tục trên khoảng xác định. Do đó:

$f(x+1)=f(y-5) \Leftrightarrow y=x+6$. Thay vào phương trình hai ta được:

$2x+6+x^2+(x+6)^2=80 \Leftrightarrow x=\frac{5\sqrt{5}-7}{2} \Leftrightarrow y=\frac{5\sqrt{5}+5}{2}$

Kết luận: Hệ có cặp nghiệm duy nhất: $x=\frac{5\sqrt{5}-7}{2}, y=\frac{5\sqrt{5}+5}{2}$.

Bài 4: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3+2x-y-2\sqrt[3]{y+1}=1 \\ y-\frac{2y+2}{x}+2x+\sqrt{x+3}=1+\sqrt{2-x} \end{cases}$

Bài giải

Điều kiện xác định: $x\in[-3;2]\setminus\{0\}$.

Ta có: $x^3+2x-y-2\sqrt[3]{y+1} \Leftrightarrow x^3+2x=\left(\sqrt[3]{y+1}\right)^3+2\left(\sqrt[3]{y+1}\right)$.

Xét hàm đặc trưng $f(t)=t^3+2t, t\in\mathbb{R} \Rightarrow f'(t)=3t^2+2>0$.

Vậy $f(t)$ đồng biến và liên tục trên khoảng xác định. Do đó:

$f(x)=f\left(\sqrt[3]{y+1}\right) \Leftrightarrow y=x^3-1$. Thay vào phương trình hai ta có:

$x^3-2x^2+2x-2+\sqrt{x+3}-\sqrt{2-x}=0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x^2-x+1)+(\sqrt{x+3}-2)+(1-\sqrt{2-x})=0$

$\Leftrightarrow (x-1)\left(x^2-x+1+\dfrac{1}{\sqrt{x+3}+2}+\dfrac{1}{1+\sqrt{2-x}}\right)=0 \Leftrightarrow x=1 \Leftrightarrow y=0$

Kết luận: Hệ có cặp nghiệm duy nhất: $x=1, y=0$.

Bài 5: Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\sqrt{x+1}+\sqrt[4]{x-1}-\sqrt{y^4+2}=y\\ x^2+2x(y-1)+y^2-6y+1=0\end{cases}$

(Trích đề thi Đại học khối A – A1 năm 2013)

Phân tích

Không khó để nhìn ra hàm đặc trưng ở phương trình 1:

$\sqrt{x+1}+\sqrt[4]{x-1}-\sqrt{y^4+2}=y \Leftrightarrow y+\sqrt{y^4+2}=\left(\sqrt[4]{x-1}\right)+\sqrt{\left(\sqrt[4]{x-1}\right)^4+2}$

Như vậy xét $f(t)=t+\sqrt{t^4+2} \Rightarrow f'(t)=1+\dfrac{2t^3}{\sqrt{t^4+2}}$. Tuy nhiên để có thể có hàm số đồng biến và liên tục, ta cần $t\ge 0$. Như vậy chỉ còn thiếu $y\ge 0$.

Nhìn thoáng qua ta tưởng chừng hệ không có điều kiện có biến y, tuy nhiên nếu ta gặp một phương trình bậc 2 theo biến x, ta có thể sắp xếp lại thành phương trình bậc 2 ẩn x tham số y và giải điều kiện có nghiệm: $\Delta\ge 0$. Khi đó ta sẽ khai thác tối đa được điều kiện của hệ phương trình.

Bài giải

Điều kiện xác định: $x\ge 1$.

Điều kiện có nghiệm: Vì $x^2+2(y-1)x+(y^2-6y+1)=0$. Do đó để phương trình ẩn x tham số y có nghiệm thì: $\Delta'=(y-1)^2-(y^2-6y+1)\ge 0 \Leftrightarrow y\ge 0$.

Mặt khác từ phương trình 1, ta biến đổi thành:

$\sqrt{x+1}+\sqrt[4]{x-1}-\sqrt{y^4+2}=y \Leftrightarrow y+\sqrt{y^4+2}=\left(\sqrt[4]{x-1}\right)+\sqrt{\left(\sqrt[4]{x-1}\right)^4+2}$

Do đó xét hàm đặc trưng: $f(t)=t+\sqrt{t^4+2}, t\ge 0 \Rightarrow f'(t)=1+\dfrac{2t^3}{\sqrt{t^4+2}}\ge 0$.

Vậy $f(t)$ đồng biến và liên tục trên khoảng xác định. Do đó:

$f(y)=f\left(\sqrt[4]{x-1}\right) \Leftrightarrow y=\sqrt[4]{x-1}\ge 0 \Leftrightarrow x-1=y^4$

Thay vào phương trình thứ hai ta có:

$(y^4+1)^2+2(y^4+1)(y-1)+y^2-6y+1=0 \Leftrightarrow y^8+2y^5+y^2-4y=0$

$\Leftrightarrow y(y-1)(y^6+y^5+y^4+3y^3+3y^2+3y+4)=0$

Vì $y\ge 0 \Rightarrow y^6+y^5+y^4+3y^3+3y^2+3y+4>0$.

Do đó: $y=0 \Rightarrow x=1$ hoặc $y=1 \Rightarrow x=2$.

Kết luận: Hệ có hai cặp nghiệm: $(x;y)\in\{(1;0);(2;1)\}$.

Bài 6: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^5 + xy^4 = y^{10} + y^6 \\ \sqrt{4x+5} + \sqrt{y^2+8} = 6 \end{cases}$

Bài giải

Điều kiện xác định: $x \geq -\frac{5}{4}$.

Xét $y = 0$, ta có hệ trở thành: $\begin{cases} x^5 = 0 \\ \sqrt{4x+5} + \sqrt{8} = 6 \end{cases}$ (vô nghiệm). Vậy $y \neq 0$.

Chia hai vế phương trình đầu cho y^5 ta được: $\left(\frac{x}{y}\right)^5 + \frac{x}{y} = y^5 + y$.

Xét hàm đặc trưng $f(t) = t^5 + t, t \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(t) = 5t^4 + 1 > 0$.

Vậy $f(t)$ đồng biến và liên tục trên khoảng xác định. Do đó:

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(y) \Leftrightarrow x = y^2$. Thay vào phương trình hai ta được:

$\sqrt{4x+5} + \sqrt{x+8} - 6 = 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{4x+5} - 3\right) + \left(\sqrt{x+8} - 3\right) = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)\left(\frac{4}{\sqrt{4x+5}+3} + \frac{1}{\sqrt{x+8}+3}\right) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Leftrightarrow y = \pm 1$

Kết luận: Hệ có hai cặp nghiệm: $x = 1, y = \pm 1$.

Bạn đọc có thể làm các bài tập áp dụng tương tự như sau:

Áp dụng 1: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} y^2\left(x^4 + x^2\right) + x = y^2 + x\left(y^8 + y^4\right) \\ x^3 + y^2 + \sqrt[3]{|x| + 7} = 4 \end{cases}$

Áp dụng 2: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} y^6 + y^4 = x^3 + xy^2 \\ y^4 - y^2 + 1 = \sqrt{3x-2} + \sqrt{x-1} \end{cases}$

Áp dụng 3: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^5\left(x^2 + y^2\right) + y^6\left(x - y^2\right) = y^{12}\left(y^2 + 1\right) \\ x^2\left(y^2 + 9\right) + 27\left(y^2 + 1\right) = 2\sqrt[3]{2x+6} \end{cases}$

Bài 7: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3 + 12y^2 + x + 2 = 8y^3 + 8y \\ 2x^2 + (2y-1)^2 = \sqrt[3]{x^3 + 8y - 2} \end{cases}$

Bài giải

Điều kiện xác định: $\mathbb{R}$. Ta có: $\Leftrightarrow x^3 + x = (2y-1)^3 + (2y-1)$. Sử dụng hàm số $f(t) = t^3 + t, t \in \mathbb{R}$ ta chỉ ra được $x = 2y - 1$. Thay vào phương trình hai ta được:

$3x^2 = \sqrt[3]{x^3 + 4x + 2} \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 4x + 2 = x^3 + 4x + 2 + \sqrt[3]{x^3 + 4x + 2}$

$\Leftrightarrow (x+1)^2 + (x+1) = \left(\sqrt[3]{x^3 + 4x + 2}\right)^3 + \left(\sqrt[3]{x^3 + 4x + 2}\right)$.

Sử dụng hàm đặc trưng $f(t) = t^3 + t, t \in \mathbb{R}$, ta chỉ ra được:

$x + 1 = \sqrt[3]{x^3 + 4x + 2} \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{6} \Leftrightarrow y = \frac{7 \pm \sqrt{13}}{12}$

Kết luận: Hệ có hai cặp nghiệm: $x=\frac{1\pm\sqrt{13}}{6};y=\frac{7\pm\sqrt{13}}{12}$.

Bài 8: Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x^3-y^3-6y^2+3(x-5y)=14\\ \sqrt{3-x}+\sqrt{y+4}=x^3+y^2-5\end{cases}$

Bài giải

Điều kiện xác định: $x\le 3;y\ge -4$.

Ta có: $x^3-y^3-6y^2+3(x-5y)=14\Leftrightarrow x^3+3x=(y+2)^3+3(y+2)$.

Sử dụng hàm đặc trưng $f(t)=t^3+3t,t\in\mathbb{R}$, ta chỉ ra được $y=x-2$.

Thay vào phương trình hai ta có:

$\sqrt{3-x}+\sqrt{x+2}=x^3+x^2-4x-1\Leftrightarrow 3\sqrt{3-x}+3\sqrt{x+2}=3x^3+3x^2-12x-3$

$\Leftrightarrow\left(x+4-3\sqrt{x+2}\right)+\left(5-x-3\sqrt{3-x}\right)+\left(3x^3+3x^2-12x-12\right)=0$

$\Leftrightarrow\frac{(x+1)(x-2)}{x+4+3\sqrt{x+2}}+\frac{(x+1)(x-2)}{5-x+3\sqrt{3-x}}+(3x+6)(x+1)(x-2)=0$

$\Leftrightarrow(x+1)(x-2)\left(\frac{1}{x+4+3\sqrt{x+2}}+\frac{1}{5-x+3\sqrt{3-x}}+3(x+2)\right)=0$

Khi đó: $x=-1\Rightarrow y=-3$ hoặc $x=2\Rightarrow y=0$.

Kết luận: Hệ có hai cặp nghiệm phân biệt: $(x;y)\in\{(-1;-3);(2;0)\}$.

Bài 9: Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=1\\ x^2+\sqrt{3-x}=2y^2-4\sqrt{2-y}+5\end{cases}$

Phân tích

Bài toán có chứa hai căn thức rất khó tháo gỡ, vì vậy hãy để ý đến liên hợp ngược sau, chúng ta sẽ dễ dàng biến đổi hơn rất nhiều:

$\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=1$

Bài giải

Điều kiện xác định: $x\le 3,y\le 2$.

Ta có: $\begin{cases}\sqrt{x^2+1}+x>\sqrt{x^2}+x=|x|+x\ge -x+x=0\\ \sqrt{x^2+1}-x>\sqrt{x^2}-x=|x|-x\ge x-x=0\end{cases}$

Vậy ta có: $\sqrt{x^2+1}+x>0,\sqrt{x^2+1}-x>0$. Do đó biến đổi phương trình đầu:

$\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$

$\Leftrightarrow y+\sqrt{y^2+1}=(-x)+\sqrt{(-x)^2+1}$. Xét hàm đặc trưng $f(t)=t+\sqrt{t^2+1}$ ta chỉ ra được $y=-x$. Thay vào phương trình thứ hai ta có:

$x^2+\sqrt{3-x}=2x^2-4\sqrt{2+x}+5\Leftrightarrow 3x^2-3\sqrt{3-x}-12\sqrt{x+2}+15=0$

$\Leftrightarrow\left(5-x-3\sqrt{3-x}\right)+4\left(x+4-3\sqrt{x+2}\right)+3x^2-3x-6=0$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+1)(x-2)}{5-x+3\sqrt{3-x}}+\frac{4(x+1)(x-2)}{x+4+3\sqrt{x+2}}+3(x+1)(x-2)=0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x-2)\left(\frac{1}{5-x+3\sqrt{3-x}}+\frac{4}{x+4+3\sqrt{x+2}}+3\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \Rightarrow y=1 \\ x=2 \Rightarrow y=-2 \end{array}\right.$$

Kết luận: Hệ có hai cặp nghiệm phân biệt: $(x;y)\in\{(-1;1);(2;-2)\}$.

Bạn đọc có thể làm các bài tập áp dụng tương tự như sau:

Áp dụng 1: Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=2 \\ x^2-3y-1=0\end{cases}$

Áp dụng 2: Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=2 \\ 12y^2-10y+2=2\sqrt[3]{x^3+1}\end{cases}$

Áp dụng 3: Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=2 \\ \sqrt{x^2+3}=2y+3\end{cases}$

Bài 10: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^6-y^3+2x^2-9y^2-33=29y \\ \sqrt{2x+3}+x=y\end{cases}$

Bài giải

Điều kiện xác định: $x\ge -\frac{3}{2}$.

Ta có: $x^6-y^3+2x^2-9y^2-33=29y \Leftrightarrow \left(x^2\right)^3+2\left(x^2\right)=(y+3)^3+2(y+3)$

Sử dụng hàm đặc trưng $f(t)=t^3+3t$ với $t\in\mathbb{R}$ ta chỉ ra được: $y=x^2-3$.

Thay vào phương trình thứ hai ta có: $x^2-x-3-\sqrt{2x+3}=0$

$\Leftrightarrow \left(x^2-2\right)-\left(x+1+\sqrt{2x+3}\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(x+1+\sqrt{2x+3}\right)\left(x+1-\sqrt{2x+3}\right)-\left(x+1+\sqrt{2x+3}\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(x+1+\sqrt{2x+3}\right)\left(x-\sqrt{2x+3}\right)=0$.

Trường hợp 1: $\sqrt{2x+3}=-(x+1) \Leftrightarrow \begin{cases}(x+1)^2=2x+3 \\ x\le -1\end{cases} \Leftrightarrow x=-\sqrt{2} \Leftrightarrow y=-1$

Trường hợp 2: $x=\sqrt{2x+3} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2=2x+3 \\ x\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow x=3 \Leftrightarrow y=6$

Kết luận: Hệ có hai cặp nghiệm phân biệt: $(x;y)\in\left\{\left(-\sqrt{2};-1\right);(3;6)\right\}$.

Bài 11: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+3x+2+\sqrt{x+2}=4y^2+2y+\sqrt{2y+1} \\ x^2+y^2-2x-2y+1=0\end{cases}$

Bài giải

Điều kiện xác định: $x\ge -2; y\ge -\frac{1}{2}$.

Điều kiện có nghiệm: $\begin{cases} x^2-2x+\left(y^2-2y+1\right)=0\Rightarrow \Delta'\ge 0\Leftrightarrow 0\le y\le 2 \\ y^2-2y+\left(x^2-2x+1\right)=0\Rightarrow \Delta'\ge 0\Leftrightarrow 0\le x\le 2 \end{cases}$

Ta có: $x^2+3x+2+\sqrt{x+2}=4y^2+2y+\sqrt{2y+1}$

$\Leftrightarrow (x+1)^2+(x+1)+\sqrt{(x+1)+1}=(2y)^2+(2y)+\sqrt{(2y)+1}$

Xét hàm số $f(t)=t^2+t+\sqrt{t+1}$ với $t\in[0;4]$ ta chỉ ra được $2y=x+1$.

Thay vào phương trình hai ta được:

$(2y-1)^2+y^2-2(2y-1)-2y+1=0\Leftrightarrow y=\dfrac{5\pm\sqrt{5}}{5}\Leftrightarrow x=\dfrac{5\pm 2\sqrt{5}}{5}$

Kết luận: Hệ có hai cặp nghiệm phân biệt: $x=\dfrac{5\pm 2\sqrt{5}}{5}, y=\dfrac{5\pm\sqrt{5}}{5}$.

Bài 12: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2y\left(1-\sqrt{1+y^2}\right)=x-\sqrt{1+x^2} \\ \sqrt{x^2+xy+x}-\sqrt{x^2-x+xy}=\sqrt{7}-\sqrt{3xy} \end{cases}$

Bài giải

Điều kiện xác định: $\begin{cases} x^2+xy+x\ge 0 \\ x^2-x+xy\ge 0 \\ xy\ge 0 \end{cases}$.

Điều kiện có nghiệm: Vì $1-\sqrt{1+y^2}\le 0, x-\sqrt{1+x^2}<x-\sqrt{x^2}=x-|x|\le 0$.

Do đó: $x^2y\ge 0\Rightarrow y\ge 0\Rightarrow x\ge 0$.

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} x^2y\left(1-\sqrt{1+y^2}\right)=x-\sqrt{1+x^2} \quad (1) \\ \sqrt{x^2+xy+x}-\sqrt{x^2-x+xy}=\sqrt{7}-\sqrt{3xy} \quad (2) \end{cases}$

Xét $x=0$ thay vào phương trình (1) ta thấy không thỏa mãn. Do đó $x>0$.

Chia cả 2 vế của phương trình (1) cho x^2 ta được:

(1) $\Leftrightarrow y-y\sqrt{1+y^2}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}$. Xét hàm đặc trưng: $f(t)=t-t\sqrt{1+t^2}$

Ta chỉ ra được: (1) $\Leftrightarrow y=\dfrac{1}{x}$.

Thay $y=\dfrac{1}{x}$ vào phương trình (2) trong hệ ta có:

(2) $\Leftrightarrow \sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}=\sqrt{7}-\sqrt{3}$

Xét hàm số: $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}-\sqrt{7}+\sqrt{3}$ ta có:

$f'(x)=\dfrac{2x+1}{\sqrt{(2x+1)^2+3}}-\dfrac{2x-1}{\sqrt{(2x-1)^2+3}}$. Xét hàm số $g(t)=\dfrac{t}{\sqrt{t^2+3}}$

$\Rightarrow g'(t)=\dfrac{3}{\left(\sqrt{t^2+3}\right)^3}>0$ nên $f'(x)=g(2x+1)-g(2x-1)>0$ nên $f(x)=0$ có nghiệm thì nghiệm đó là duy nhất. Mà $x=2$ là một nghiệm của phương trình. Nên $x=2$ là nghiệm duy nhất của phương trình

Kết luận: Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=\left(2;\dfrac{1}{2}\right)$

Bài 13: Giải hệ phương trình: $\begin{cases}2x^3-4x^2+3x-1=2x^3(2-y)\sqrt{3-2y}\\ \sqrt{x+2}=\sqrt[3]{14-x\sqrt{3-2y}}+1\end{cases}$

Bài giải

Điều kiện xác định: $\begin{cases}x\ge -2\\ y\le \dfrac{3}{2}\end{cases}$

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases}2x^3-4x^2+3x-1=2x^3(2-y)\sqrt{3-2y}(1)\\ \sqrt{x+2}=\sqrt[3]{14-x\sqrt{3-2y}}+1(2)\end{cases}$

Xét $x=0$ thay vào phương trình (1) ta thấy không thỏa mãn. Do đó $x\neq 0$

Chia cả 2 vế của phương trình (1) cho x^3 ta được:

$(1)\Leftrightarrow 2-\dfrac{4}{x}+\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}=\left(\sqrt{3-2y}\right)^3+\sqrt{3-2y}$

$\Leftrightarrow\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^3+\left(1-\dfrac{1}{x}\right)=\left(\sqrt{3-2y}\right)^3+\sqrt{3-2y}$

Xét hàm đặc trưng: $f(t)=t^3+t$. Ta có: $f'(t)=3t^2+1>0\ \forall t\in\mathbb{R}$.

Nên hàm số liên tục và đồng biến trên $\mathbb{R}$. Vì vậy: $(1)\Leftrightarrow 1-\dfrac{1}{x}=\sqrt{3-2y}$

Thay $1-\dfrac{1}{x}=\sqrt{3-2y}$ vào phương trình (2) trong hệ ta có:

$\sqrt{x+2}=\sqrt[3]{14-x\sqrt{3-2y}}\Leftrightarrow\sqrt{x+2}+\sqrt[3]{x-15}=1$

$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x+2}-3\right)+\left(\sqrt[3]{x-15}+2\right)=0\Leftrightarrow\dfrac{x-7}{\sqrt{x+2}+3}+\dfrac{x-7}{\sqrt[3]{(x-15)^2}-2\sqrt[3]{x-15}+4}=0$

$\Leftrightarrow(x-7)\left[\dfrac{1}{\sqrt{x+2}+3}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{(x-15)^2}-2\sqrt[3]{x-15}+4}\right]=0\quad(*)$

Do $\dfrac{1}{\sqrt{x+2}+3}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{(x-15)^2}-2\sqrt[3]{x-15}+4}>0\quad\forall x\ge -2$

Nên $(*)\Leftrightarrow x=7\Leftrightarrow\sqrt{3-2y}=\dfrac{6}{7}\Leftrightarrow y=\dfrac{111}{98}$.

Kết luận: Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=\left(7;\dfrac{111}{98}\right)$

Bài 14: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x+\dfrac{x^3}{x+1}=(y+2)\sqrt{x+1}\sqrt{y+1} \\ x\sqrt{y+1}-2x+\sqrt{x+1}=0 \end{cases}$

Bài giải

Điều kiện xác định: $\begin{cases} x>-1 \\ y\ge -1 \end{cases}$.

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} x+\dfrac{x^3}{x+1}=(y+2)\sqrt{x+1}\sqrt{y+1} & (1) \\ x\sqrt{y+1}-2x+\sqrt{x+1}=0 & (2) \end{cases}$

Chia cả 2 vế của phương trình (1) cho $\sqrt{x+1}$ ta được:

$$\frac{x}{\sqrt{x+1}}+\frac{x^3}{(x+1)\sqrt{x+1}}=(y+1)\sqrt{y+1}+\sqrt{y+1}$$

Xét hàm đặc trưng: $f(t)=t^3+t$. Ta có: $f'(t)=3t^2+1>0 \quad \forall t\in\mathbb{R}$

Nên hàm số liên tục và đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Vì vậy: (1) $\Leftrightarrow \dfrac{x}{\sqrt{x+1}}=\sqrt{y+1}$. Thay $\dfrac{x}{\sqrt{x+1}}=\sqrt{y+1}$ vào phương trình (2) trong hệ ta có: $\Leftrightarrow x\dfrac{x}{\sqrt{x+1}}-2x+\sqrt{x+1}=0 \Leftrightarrow x^2-2x\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)}^2=0$

$$\Leftrightarrow \left(x-\sqrt{x+1}\right)^2=0 \Leftrightarrow x=\sqrt{x+1} \Leftrightarrow x^2-x-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

$$\frac{x^2}{x+1}=y+1 \Leftrightarrow y=\frac{x^2}{x+1}-1=\frac{x^2-x-1}{x+1}=0$$

Kết luận: Vậy hệ phương trình có cặp nghiệm $\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2};0\right);\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2};0\right)$

Bài 15: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x+3y+1=y^2-\dfrac{1}{y}+\dfrac{3x+4}{\sqrt{x+1}} \\ \sqrt{9y-2}+\sqrt[3]{7x+2y+2}=2y+3 \end{cases}$

Bài giải

Điều kiện xác định: $\begin{cases} x>-1 \\ y\ge \dfrac{2}{9} \end{cases}$

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} x+3y+1=y^2-\dfrac{1}{y}+\dfrac{3x+4}{\sqrt{x+1}} & (1) \\ \sqrt{9y-2}+\sqrt[3]{7x+2y+2}=2y+3 & (2) \end{cases}$

Xét phương trình (1) ta có:

$$(1) \Leftrightarrow x-\frac{3x+4}{\sqrt{x+1}}+1=y^2-\frac{1}{y}-3y \Leftrightarrow (x+1)-3\sqrt{x+1}-\frac{1}{\sqrt{x+1}}=y^2-3y-\frac{1}{y}$$

Xét hàm đặc trưng: $f(t)=t^2-3t-\frac{1}{t}$. Ta có: $f'(t)=\frac{(2t+1)(t-1)^2}{t^2}>0$ nên hàm số liên tục và đồng biến trên tập xác định. Vì vậy: $(1)\Leftrightarrow x+1=y^2$

Thay $x=y^2-1$ vào phương trình (2) trong hệ ta có:

$\Rightarrow\sqrt{9y-2}+\sqrt[3]{7y^2+2y-5}=2y+3$

$\Leftrightarrow\left(\sqrt{9y-2}-y-2\right)+\left(\sqrt[3]{7y^2+2y-5}-y-1\right)=0$

$$\Leftrightarrow\frac{y^2+4y+4-9y+2}{\sqrt{9y-2}+y+2}+\frac{y^3+3y^2+3y+1-7y^2-2y+5}{(y+1)^2+(y+1)\sqrt[3]{7y^2+2y-5}+\sqrt[3]{\left(7y^2+2y-5\right)^2}}=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{y^2-5y+6}{\sqrt{9y-2}+y+2}+\frac{y^3-4y^2+y+6}{(y+1)^2+(y+1)\sqrt[3]{7y^2+2y-5}+\sqrt[3]{\left(7y^2+2y-5\right)^2}}=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{y^2-5y+6}{\sqrt{9y-2}+y+2}+\frac{(y+1)\left(y^2-5y+6\right)}{(y+1)^2+(y+1)\sqrt[3]{7y^2+2y-5}+\sqrt[3]{\left(7y^2+2y-5\right)^2}}=0$$

$$\Leftrightarrow\left(y^2-5y+6\right)\left[\frac{1}{\sqrt{9y-2}+y+2}+\frac{(y+1)}{\frac{3}{4}(y+1)^2+\left(\frac{y+1}{2}+\sqrt[3]{7y^2+2y-5}\right)^2}\right]=0$$

Do $\frac{1}{\sqrt{9y-2}+y+2}+\frac{(y+1)}{\frac{3}{4}(y+1)^2+\left(\frac{y+1}{2}+\sqrt[3]{7y^2+2y-5}\right)^2}>0\quad\forall y\geq\frac{2}{9}$.

Nên $\Leftrightarrow y^2-5y+6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y_1=3\\y_2=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=8\\x=3\end{array}\right.$

Kết luận: Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x;y)=(3;2);(8;3)$.

Bài 16: Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\sqrt{3+x}-\sqrt{2-x}=\frac{1}{2y}-4\sqrt{\frac{1}{2y}+3}+8\\x+\sqrt{x^2+1}=x^2y\left(2+2\sqrt{4y^2+1}\right)\end{cases}$

Bài giải

Điều kiện xác định: $-3\leq x\leq 2;y\geq-\frac{1}{6};y\neq 0$

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases}\sqrt{3+x}-\sqrt{2-x}=\frac{1}{2y}-4\sqrt{\frac{1}{2y}+3}+8 & (1)\\x+\sqrt{x^2+1}=x^2y\left(2+2\sqrt{4y^2+1}\right) & (2)\end{cases}$

Ta nhận thấy từ phương trình thứ 1 trong hệ ta có:

$$\sqrt{3+x}-\sqrt{2-x}=\left(\frac{1}{2y}+3\right)-4\sqrt{\frac{1}{2y}+3}+5=\left(\sqrt{\frac{1}{2y}+3}-2\right)^2+1\ge 1$$

$\Rightarrow \sqrt{3+x}\ge 1+\sqrt{2-x}\Leftrightarrow x\ge 1$. Do đó $x\in[1;2]$

Do $x\in[1;2]$ nên chia cả 2 vế của phương trình 2 cho x^2 ta được:

$\Leftrightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{x}\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}=y\left(2+2\sqrt{4y^2+1}\right)$. Xét hàm đặc trưng: $f(t)=t+t\sqrt{t^2+1}$

Ta chứng minh được hàm số liên tục và đồng biến trên tập xác định.

Vì vậy: $(2)\Leftrightarrow 2y=\frac{1}{x}$. Thay $2y=\frac{1}{x}$ vào phương trình (1) trong hệ ta có:

$$\Leftrightarrow x-5\sqrt{x+3}+\sqrt{2-x}+8=0\Leftrightarrow 5\left(x+3-2\sqrt{x+3}\right)+2\left(\sqrt{2-x}-1\right)+3-3x=0$$

$$\Leftrightarrow 5\sqrt{x+3}\frac{x-1}{\sqrt{x+3}+2}+2\frac{1-x}{\sqrt{2-x}+1}+3(1-x)=0$$

$$\Leftrightarrow (1-x)\left[\frac{2}{\sqrt{2-x}+1}+3-\frac{5\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+3}+2}\right]=0\Leftrightarrow (1-x)\left[\frac{2}{\sqrt{2-x}+1}+\frac{6-2\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+3}+2}\right]=0$$

Do $x<2\Rightarrow 2\sqrt{x+3}<2\sqrt{5}<6\Rightarrow 6-2\sqrt{x+3}>0\Rightarrow \frac{2}{\sqrt{2-x}+1}+\frac{6-2\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+3}+2}>0$

Do đó $\Leftrightarrow x=1\Rightarrow y=\frac{1}{2}$.

Kết luận: Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=\left(1;\frac{1}{2}\right)$.

Bài 17: Giải hệ phương trình: $\begin{cases}4\sqrt{1+2x^2y}-1=3x+2\sqrt{1-2x^2y}+\sqrt{1-x^2}\\ 2x^3y-x^2=\sqrt{x^4+x^2}-2x^3y\sqrt{4y^2+1}\end{cases}$

Bài giải

Điều kiện xác định: $\begin{cases}-1\le x\le 1\\ 1-2x^2y\ge 0\\ 1+2x^2y\ge 0\end{cases}$

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases}4\sqrt{1+2x^2y}-1=3x+2\sqrt{1-2x^2y}+\sqrt{1-x^2} & (1)\\ 2x^3y-x^2=\sqrt{x^4+x^2}-2x^3y\sqrt{4y^2+1} & (2)\end{cases}$

Xét $x=0$ không thỏa mãn hệ phương trình do đó $x\neq 0$ nên chia cả 2 vế phương trình (2) cho x^3 ta thu được:

$$2x^3y+2x^3y\sqrt{4y^2+1}=x^2+\sqrt{x^4+x^2}\Leftrightarrow 2y+2y\sqrt{4y^2+1}=\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}$$

Xét hàm đặc trưng: $f(t)=t+t\sqrt{t^2+1}$. Ta chỉ ra được hàm số liên tục và đồng biến trên tập xác định. Vì vậy: $(2)\Leftrightarrow 2y=\frac{1}{x}$.

Thay $2y=\frac{1}{x}$ vào phương trình (1) trong hệ ta có:

$3x+1+2\sqrt{1-x}+\sqrt{1-x^2}-4\sqrt{x+1}=0$

Đặt $a=\sqrt{1-x}\Rightarrow x=1-a^2\Rightarrow x+1=2-a^2\Leftrightarrow 4-3a^2+2a+(a-4)\sqrt{2-a^2}=0$

$\Leftrightarrow 4+4a^2-8a+(a-4)\left(2-a-\sqrt{2-a^2}\right)=0$

$\Leftrightarrow 4+4a^2-8a+(a-4)\frac{2a^2-4a+2}{2-a+\sqrt{2-a^2}}=0$

$\Leftrightarrow (a-1)^2\left[4+\frac{2a-8}{2-a+\sqrt{2-a^2}}\right]=0\Leftrightarrow (a-1)^2\left(4\sqrt{2-a^2}-2a\right)=0$ (*)

Do $x\neq 0$ nên $a\neq 1$ do đó (*) $\Leftrightarrow 2\sqrt{2-a^2}=a\Leftrightarrow a=\frac{2\sqrt{10}}{5}\Leftrightarrow x=\frac{5-2\sqrt{10}}{5}$.

Với $x=\frac{5-2\sqrt{10}}{5}$ ta có $y=\frac{1}{2x}=\frac{-5-2\sqrt{10}}{6}$.

Kết luận: Hệ có cặp nghiệm duy nhất $(x;y)=\left(\frac{5-2\sqrt{10}}{5};\frac{-5-2\sqrt{10}}{6}\right)$.

Bài 18: Giải hệ phương trình: $\begin{cases}2x^2+3=\left(4x^2-2x^2y\right)\sqrt{3-2y}+\frac{4x^2+1}{x}\\ \sqrt{2-\sqrt{3-2y}}=\frac{\sqrt[3]{2x^2+x^3}+x+2}{2x+1}\end{cases}$

Bài giải

Điều kiện xác định: $\begin{cases}x\neq 0\\ y\le\frac{3}{2}\end{cases}$

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases}2x^2+3=\left(4x^2-2x^2y\right)\sqrt{3-2y}+\frac{4x^2+1}{x} & (1)\\ \sqrt{2-\sqrt{3-2y}}=\frac{\sqrt[3]{2x^2+x^3}+x+2}{2x+1} & (2)\end{cases}$

Xét phương trình (1): $2x^2+3=\left(4x^2-2x^2y\right)\sqrt{3-2y}+\frac{4x^2+1}{x}$

$\Leftrightarrow 2x^2+3-\frac{4x^2+1}{x}=x^2(4-2y)\sqrt{3-2y}$. Chia cả 2 vế cho x^2 ta được:

$\left(1-\frac{1}{x}\right)^3+\left(1-\frac{1}{x}\right)=\left(\sqrt{3-2y}\right)^3+\sqrt{3-2y}$. Xét hàm đặc trưng: $f(t)=t^3+t$

Ta chỉ ra được hàm số liên tục và đồng biến trên tập xác định.

Vì vậy: (1) $\Leftrightarrow 1-\frac{1}{x}=\sqrt{3-2y}$. Thay $1-\frac{1}{x}=\sqrt{3-2y}$ vào phương trình (2) trong hệ ta có: $(2x+1)\sqrt{1+\frac{1}{x}}=(x+2)+\sqrt[3]{2x^2+x^3}$. Chia 2 vế cho x ta được:

$\left(2+\frac{1}{x}\right)\sqrt{1+\frac{1}{x}}=1+\frac{2}{x}+\sqrt[3]{1+\frac{2}{x}}\Leftrightarrow\sqrt{1+\frac{1}{x}}=\sqrt[3]{1+\frac{2}{x}}$

Đặt: $a=\frac{1}{x}\Leftrightarrow(1+a)^3=(1+2a)^2\Leftrightarrow a^3+3a^2+3a+1=4a^2+4a+1$

$\Leftrightarrow a^3-a^2-a=0\Leftrightarrow a=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\Leftrightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\Leftrightarrow y=\frac{3\pm\sqrt{5}}{4}$.

Kết luận: Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x;y)=\left(\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2};\frac{3\pm\sqrt{5}}{4}\right)$.

Bài 19: Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x^{11}+xy^{10}=y^{22}+y^{12}\\7y^4+13x+8=2y^4.\sqrt[3]{x\left(3x^2+3y^2-1\right)}\end{cases}$

(Đề nghị Olympic 30/04/2014 Lê QuýĐôn Đà Nẵng)

Bài giải

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases}x^{11}+xy^{10}=y^{22}+y^{12} & (1)\\7y^4+13x+8=2y^4.\sqrt[3]{x\left(3x^2+3y^2-1\right)} & (2)\end{cases}$

Xét $y=0$ không là nghiệm của hệ phương trình nên $y\neq0$ do đó chia 2 vế của phương trình (1) cho y^{11} ta được: (1) $\Leftrightarrow\left(\frac{x}{y}\right)^{11}+\frac{x}{y}=y^{11}+y$

Xét hàm đặc trưng: $f(t)=t^{11}+t$. Ta chỉ ra được hàm số liên tục và đồng biến trên tập xác định. Vì vậy: (1) $\Leftrightarrow\frac{x}{y}=y\Leftrightarrow x=y^2$.

Thay $y^2=x$ vào phương trình (2) trong hệ ta có:

$\Leftrightarrow7x^2+13x+8=2x^2.\sqrt[3]{x\left(3x^2+3x-1\right)}$

Do $y^2=x$ và $y\neq0$ nên $x>0$ do đó chia 2 vế của phương trình (1) cho x^3 ta được:

$\Leftrightarrow\left(\frac{2}{x}+1\right)^3+2\left(\frac{2}{x}+1\right)=3+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}+2\sqrt[3]{3+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}}$ (*).

Xét hàm đặc trưng: $f(t)=t^3+2t$. Ta chỉ ra được hàm số liên tục và đồng biến trên tập xác định. Vì vậy: (*) $\Leftrightarrow\frac{2}{x}+1=\sqrt[3]{3+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}}$

Đặt $a=\frac{1}{x}(a>0)$. Khi đó phương trình trở thành:

$2a+1=\sqrt[3]{3+3a-a^2}\Leftrightarrow8a^3+12a^2+6a+1=3+3a-a^2$

$\Leftrightarrow8a^3+13a^2+3a-2=0\Leftrightarrow\left(8a^2+5a-2\right)(a+1)=0$

$\Leftrightarrow a=\frac{-5+\sqrt{89}}{16}\Leftrightarrow x=\frac{5+\sqrt{89}}{4}\Leftrightarrow y=\pm\sqrt{\frac{5+\sqrt{89}}{4}}$.

Kết luận: Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x;y)=\left(\frac{5+\sqrt{89}}{4};\pm\sqrt{\frac{5+\sqrt{89}}{4}}\right)$.

Bài 20: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x+\sqrt{x^2-2x+5}=3y+\sqrt{y^2+4} \\ x^2-y^2-3x+3y+1=0 \end{cases}$

Bài giải

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} x+\sqrt{x^2-2x+5}=3y+\sqrt{y^2+4}(1) \\ x^2-y^2-3x+3y+1=0(2) \end{cases}$

Cộng vế với vế 2 phương trình trong hệ ta thu được:

$\Rightarrow x^2-2x+1+\sqrt{(x-1)^2+4}=y^2+\sqrt{y^2+4}$

$\Leftrightarrow (x-1)^2+\sqrt{(x-1)^2+4}=y^2+\sqrt{y^2+4}$ (*)

Xét hàm đặc trưng: $f(t)=t+\sqrt{t+4}$. Ta chỉ ra được hàm số liên tục và đồng biến trên tập xác định. Vì vậy: (*) $\Leftrightarrow (x-1)^2=y^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=x-1 \\ y=1-x \end{array}\right.$.

Trường hợp 1: Thay $y=x-1$ vào phương trình (2) trong hệ ta có:

$\Leftrightarrow x^2-(x-1)^2-3x+3(x-1)+1=0 \Leftrightarrow 2x-3=0 \Leftrightarrow x=\frac{3}{2} \Rightarrow y=\frac{1}{2}$

Trường hợp 2: Thay $y=1-x$ vào phương trình (2) trong hệ ta có:

$\Leftrightarrow x^2-(x-1)^2-3x+3(1-x)+1=0 \Leftrightarrow -4x+3=0 \Leftrightarrow x=\frac{3}{4} \Rightarrow y=\frac{1}{4}$

Kết luận: Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x;y)=\left(\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right);\left(\frac{3}{4};\frac{1}{4}\right)$.

Bài 21: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x^2+x+\sqrt{x+2}=2y^2+y+\sqrt{2y+1} \\ x^2+2y^2-2x+y-2=0 \end{cases}$

Bài giải

Điều kiện xác định: $\begin{cases} x\ge -2 \\ y\ge -\frac{1}{2} \end{cases}$

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} 2x^2+x+\sqrt{x+2}=2y^2+y+\sqrt{2y+1} & (1) \\ x^2+2y^2-2x+y-2=0 & (2) \end{cases}$

Trừ vế với vế của 2 phương trình trong hệ trên ta thu được:

$\Rightarrow x^2+3x+2+\sqrt{x+2}=4y^2+2y+\sqrt{2y+1}$

$\Leftrightarrow (x+1)^2+(x+1)+\sqrt{x+2}=(2y)^2+2y+\sqrt{2y+1}$ (*)

Xét hàm đặc trưng: $f(t)=t^2+t+\sqrt{t+1}$ trên $(-1;+\infty)$.

Ta có: $f'(t)=2t+\frac{1}{2\sqrt{t+1}}+1=2(t+1)+\frac{1}{4\sqrt{t+1}}+\frac{1}{4\sqrt{t+1}}-1$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$2(t+1)+\frac{1}{4\sqrt{t+1}}+\frac{1}{4\sqrt{t+1}}\ge 3\sqrt[3]{2(t+1).\frac{1}{4\sqrt{t+1}}.\frac{1}{4\sqrt{t+1}}}=3\sqrt[3]{\frac{1}{8}}=\frac{3}{2}$$

Do đó $f'(t)\ge\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}>0$. Nên hàm số liên tục và đồng biến trên $(-1;+\infty)$.

Vì vậy: (*) $\Leftrightarrow x+1=2y$. Thay vào phương trình (2) trong hệ ta có:

$$(2y-1)^2+2y^2-2(2y-1)+y-2=0\Leftrightarrow 6y^2-7y+1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=1\Rightarrow x=1\\ y=\frac{1}{6}\Rightarrow x=-\frac{2}{3}\end{array}\right.$$

Kết luận: Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x;y)=(1;1);\left(-\frac{2}{3};\frac{1}{6}\right)$.

Bài 22: Giải hệ phương trình: $\begin{cases}y^2-5\sqrt{x}+5=0\\ \sqrt{x+2}=\sqrt{y^2+2y+3}-\frac{1}{5}y^2+y\end{cases}$

Bài giải

Tập xác định: $x\ge 0; y\in\mathbb{R}$.

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases}y^2-5\sqrt{x}+5=0 & (1)\\ \sqrt{x+2}=\sqrt{y^2+2y+3}-\frac{1}{5}y^2+y & (2)\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y^2-5\sqrt{x}+5=0\\ \sqrt{x+2}+\frac{1}{5}y^2-y-\sqrt{y^2+2y+3}=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y^2-5\sqrt{x}+5=0\\ 5\sqrt{x+2}+y^2-5y-5\sqrt{y^2+2y+3}=0\end{cases}$$

Trừ vế với vế hai phương trình ta được:

$$-5\sqrt{x}+5-5\sqrt{x+2}+5y+5\sqrt{y^2+2y+3}=0$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{x}+1-\sqrt{x+2}+y+\sqrt{y^2+2y+3}=0\Leftrightarrow\sqrt{x}-1+\sqrt{x+2}=y+\sqrt{y^2+2y+3}$$

$$\Leftrightarrow (y+1)+\sqrt{(y+1)^2+2}=\sqrt{x}+\sqrt{\sqrt{x}^2+2}\ (*)$$

Xét hàm đặc trưng: $f(t)=t+\sqrt{t^2+2}$ trên $\mathbb{R}$

Ta có: $f'(t)=1+\frac{t}{\sqrt{t^2+2}}=\frac{t+\sqrt{t^2+2}}{\sqrt{t^2+2}}>\frac{t+\sqrt{t^2}}{\sqrt{t^2+2}}\ge\frac{t+|t|}{\sqrt{t^2+2}}\ge 0$.

Nên hàm số liên tục và đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Vì vậy: (*) $\Leftrightarrow y+1=\sqrt{x}$. Thay $y+1=\sqrt{x}$ vào phương trình (1) trong hệ ta có:

$$y^2-5(y+1)+5=0\Leftrightarrow y^2-5y=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=0\Rightarrow x=1\\ y=5\Rightarrow x=36\end{array}\right..$$

Kết luận: Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x;y)=(1;0);(36;5)$.

Bài 23: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x-y}+\dfrac{\sqrt{1-y}}{1+\sqrt{y+1}}=\dfrac{\sqrt{1-x}}{1+\sqrt{x+1}} \\ x^2+xy+y^2=3 \end{cases}$

Bài giải

Điều kiện xác định: $-1\le y\le x\le 1$.

Ta có: $\sqrt{x-y}+\dfrac{\sqrt{1-y}}{1+\sqrt{y+1}}=\dfrac{\sqrt{1-x}}{1+\sqrt{x+1}}\ge\dfrac{\sqrt{1-y}}{1+\sqrt{y+1}}$.

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{\sqrt{1-t}}{1+\sqrt{t+1}}$, ta chứng minh được $f(t)$ là hàm số nghịch biến, do đó:

$f(x)\ge f(y)\Leftrightarrow x\le y$. Mặt khác $x\ge y$ do đó: $x=y$.

Thay vào phương trình hai ta tìm được $x=y=\pm1$.

Kết luận: Hệ có hai cặp nghiệm: $x=y=\pm1$.

Bài 24: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x-y}+\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}=\dfrac{\sqrt{y^2+1}}{y+1} \\ x^2+y^2-4x-4y+7=0 \end{cases}$

Bài giải

Điều kiện xác định: $x\ge y$.

Điều kiện có nghiệm: Ta để ý rằng phương trình hai biến đổi thành:

$$(x-2)^2+(y-2)^2=1\Rightarrow\begin{cases}(x-2)^2\le1\\(y-2)^2\le1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1\le x\le3\\1\le y\le3\end{cases}$$

Mặt khác: $\dfrac{\sqrt{y^2+1}}{y+1}=\sqrt{x-y}+\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}\ge\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$.

Do đó xét hàm số $f(t)=\dfrac{\sqrt{t^2+1}}{t+1}$ với $t\in[1;3]$.

Ta có: $f'(t)=\dfrac{\dfrac{t(t+1)}{\sqrt{t^2+1}}-\sqrt{t^2+1}}{(t+1)^2}=\dfrac{t-1}{(t+1)^2\sqrt{t^2+1}}\ge0$.

Vậy $f(y)\ge f(x)\Leftrightarrow y\ge x$. Mà theo điều kiện ta có: $x\ge y$. Vậy $x=y$.

Thay vào phương trình thứ hai ta được: $x=y=\dfrac{4\pm\sqrt2}{2}$.

Kết luận: Hệ có hai cặp nghiệm phân biệt: $x=y=\dfrac{4\pm\sqrt2}{2}$.

Bài 25: Giải hệ phương trình: $\begin{cases}(2x-3y)\sqrt{y^2+1}=y\sqrt{(x-y)^2+1}\\ x^2+y^2+2x-3y-1=0\end{cases}$

Bài giải

Ta biến đổi phương trình đầu trở thành:

$(x-2y)\sqrt{y^2+1}+(x-y)\sqrt{y^2+1}=y\sqrt{(x-y)^2+1}$

$\Leftrightarrow \dfrac{x-2y}{\sqrt{(x-y)^2+1}}+\dfrac{x-y}{\sqrt{(x-y)^2+1}}=\dfrac{y}{\sqrt{y^2+1}}$. Xét $f(t)=\dfrac{t}{\sqrt{t^2+1}}$ với $t\in\mathbb{R}$.

Ta có: $f'(t)=\dfrac{\sqrt{t^2+1}-\dfrac{t^2}{\sqrt{t^2+1}}}{t^2+1}=\dfrac{1}{(t^2+1)\sqrt{t^2+1}}>0$. Do đó $f(t)$ đồng biến và liên tục trên $\mathbb{R}$.

Trường hợp 1: Nếu $x\ge 2y$. Khi đó ta có:

$\dfrac{y}{\sqrt{y^2+1}}=\dfrac{x-2y}{\sqrt{(x-y)^2+1}}+\dfrac{x-y}{\sqrt{(x-y)^2+1}}\ge\dfrac{x-y}{\sqrt{(x-y)^2+1}}$.

Do đó: $f(y)\ge f(x-y)\Leftrightarrow y\ge x-y\Leftrightarrow x\le 2y$. Vậy $x=2y$.

Trường hợp 2: Nếu $x\le 2y$. Khi đó ta có:

$\dfrac{y}{\sqrt{y^2+1}}=\dfrac{x-2y}{\sqrt{(x-y)^2+1}}+\dfrac{x-y}{\sqrt{(x-y)^2+1}}\le\dfrac{x-y}{\sqrt{(x-y)^2+1}}$.

Do đó: $f(y)\le f(x-y)\Leftrightarrow y\le x-y\Leftrightarrow x\ge 2y$. Vậy $x=2y$.

Do vậy kết hợp cả hai trường hợp ta đều có: $x=2y$. Thay vào phương trình hai ta được: $5y^2+y-1=0\Leftrightarrow y=\dfrac{-1\pm\sqrt{21}}{10}\Leftrightarrow x=\dfrac{-1\pm\sqrt{21}}{5}$.

Kết luận: Hệ có hai cặp nghiệm: $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{21}}{5};y=\dfrac{-1\pm\sqrt{21}}{10}$.

Bài 26: Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x\left(\sqrt{x^2+1}+2\right)=y\sqrt{y^2+1}+y^2+1\\ \sqrt{y-x}+x^2+2y=3\end{cases}$

Bài giải

Điều kiện xác định: $y\ge x$.

Theo bất đẳng thức AM – GM ta có:

$x\sqrt{x^2+1}+2x=y\sqrt{y^2+1}+y^2+1\ge y\sqrt{y^2+1}+2y$

Xét hàm số $f(t)=t\sqrt{t^2+1}+2t$ với $t\in\mathbb{R}$. Ta chỉ ra được $f(t)$ là hàm số đồng biến và liên tục trên $\mathbb{R}$. Do đó: $f(x)\ge f(y)\Leftrightarrow x\ge y$.

Mặt khác theo điều kiện xác định ta có: $y\ge x$. Do vậy: $x=y$.

Thay vào phương trình thứ hai ta được: $x=y=1$ hoặc $x=y=-3$.

Kết luận: Hệ có hai cặp nghiệm: $x=y=1;x=y=-3$.